TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Tentamen Functies van meer variabelen, deel B (2YE06) op vrijdag 1 juli 2005, 9.00 – 10.30 uur.

De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden. Bovendien dient U in alle gevallen uw antwoord te beargumenteren!

Een **niet-grafische** rekenmachine is toegestaan.

---

1. Bereken

$$\iiint_R x^2 + y^2 \mathrm{d}V$$

   met R het gebied boven de kegel $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ en binnen de bol $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

2. Bereken de lijnintegraal

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

   met C de kromme geparameteriseerd door de vectorfunctie $\boldsymbol{r}(t)$ met

$$\boldsymbol{F}(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 y^3 \\ -y\sqrt{x} \end{pmatrix}$$

   en

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ -t^3 \end{pmatrix}, \qquad 0 \le t \le 1.$$

3. Bepaal

$$\iint_S xy \mathrm{d}S$$

   met S de rand van het gebied begrensd door de cylinder $x^2 + z^2 = 1$ en de vlakken $y = 0$ en $x + y = 2$.

   Let op: de rand bestaat uit drie stukken.

Voor de vraagstukken kunnen de volgende aantallen punten worden behaald:

Vraagstuk	1.	15 punten	Vraagstuk	2.	10 punten	Vraagstuk	3.	15 punten

Het cijfer wordt bepaald door het totaal der behaalde punten door 4 te delen.

TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Uitwerking tentamen Functies van meer variabelen, deel B (2YE06) op vrijdag 1 juli 2005, 9.00 – 10.30 uur.

1.

> Bereken
>
> $$\iiint_R x^2 + y^2 \mathrm{d}V$$
>
> met R het gebied boven de kegel $z = \sqrt{x^2+y^2}$ en binnen de bol $x^2+y^2+z^2 = 1$.

Het gebied wordt beschreven door:

$$z \geq \sqrt{x^2+y^2}, \quad x^2+y^2+z^2 \leq 1$$

Gecombineerd met de functie x^2+y^2 die we moeten integreren lijken cylinderco-ordinaten of bolcoördinaten voor de hand te liggen. In het gevak van cylindercoördinaten krijgen we:

$$x = r\cos\vartheta, \quad y = r\sin\vartheta, \quad z = z$$

met $r \geq 0$ en $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$. Bovendien:

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = r\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}r\mathrm{d}z.$$

De ongelijkheden die R beschrijven leveren op:

$$r \leq z, \quad z \leq \sqrt{1-r^2}$$

Dit levert de grenzen voor z maar we moeten wel oppassen want uit die twee gelijkheden volgt als we ze combineren dat:

$$r \leq \sqrt{1-r^2}$$

en dit levert op (als we gebruiken dat $r \geq 0$) dat:

$$2r^2 \leq 1$$

en dus $r \leq \frac{1}{2}\sqrt{2}$. We vinden:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \int_r^{\sqrt{1-r^2}} \int_0^{2\pi} r^3 \mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}z\mathrm{d}r$$

De binnenste integraal uitrekenen levert op:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \int_r^{\sqrt{1-r^2}} 2\pi r^3 \,\mathrm{d}z\mathrm{d}r$$

De volgende integraal uitrekenen levert op:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} 2\pi r^3(\sqrt{1-r^2}-r)\,\mathrm{d}r.$$

Nu moeten we even zorgvuldig rekenen:

$$\begin{aligned}
\iiint_R x^2+y^2\mathrm{d}V &= \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} 2\pi r^3\sqrt{1-r^2}\,\mathrm{d}r - \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} 2\pi r^4\,\mathrm{d}r \\
&= \int_1^{1/2} 2\pi(s-1)\sqrt{s}\,\mathrm{d}s - \left[\tfrac{2}{5}\pi r^5\right]_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \\
&= \int_1^{1/2} \pi(s^{3/2}-s^{1/2})\,\mathrm{d}s - \tfrac{1}{20}\pi\sqrt{2} \\
&= \left[\pi(\tfrac{2}{5}s^{5/2}-\tfrac{2}{3}s^{3/2})\right]_1^{1/2} - \tfrac{1}{20}\pi\sqrt{2} \\
&= \pi(\tfrac{2}{40}\sqrt{2}-\tfrac{2}{12}\sqrt{2}-\tfrac{2}{5}+\tfrac{2}{3}) - \tfrac{1}{20}\pi\sqrt{2} \\
&= (\tfrac{4}{15}-\tfrac{1}{6}\sqrt{2})\pi,
\end{aligned}$$

waarbij we de substitutie $s = 1 - r^2$ hebben gebruikt.
Als we met bolcoördinaten werken krijgen we:

$$x = \rho\cos\vartheta\sin\varphi, \quad y = \rho\sin\vartheta\sin\varphi, \quad z = \rho\cos\varphi$$

met $r \geq 0$, $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$ en $0 \leq \varphi \leq \pi$. Bovendien:

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi.$$

Voor de grenzen krijgen we:

$$\rho \leq 1 \quad \text{en} \quad \rho\cos\varphi \geq \rho|\sin\varphi|$$

hetgeen oplevert:

$$0 \leq \rho \leq 1 \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$$

We vinden:

$$\int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi}\int_0^1 (\rho^2\sin^2\varphi)\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi$$

of

$$\int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho^4\sin^3\varphi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi$$

De binnenste integraal levert op:

$$\int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi} \tfrac{1}{5}\sin^3\varphi\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi$$

en de volgende integraal resulteert dan in:

$$\int_0^{\pi/4} \tfrac{2\pi}{5}\sin^3\varphi\mathrm{d}\varphi$$

De substitutie $u = \cos\varphi$ levert dan op:

$$\int_1^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \tfrac{2\pi}{5}(u^2-1)\mathrm{d}u$$

en dit geeft:

$$\tfrac{2\pi}{5}(\tfrac{1}{12}\sqrt{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}-\tfrac{1}{3}+1) = (\tfrac{4}{15}-\tfrac{1}{6}\sqrt{2})\pi.$$

2.

> Bereken de lijnintegraal
>
> $$\int_C \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$
>
> met C de kromme geparameteriseerd door de vectorfunctie $\boldsymbol{r}(t)$ met
>
> $$\boldsymbol{F}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2y^3 \\ -y\sqrt{x} \end{pmatrix}$$
>
> en
>
> $$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ -t^3 \end{pmatrix}, \qquad 0 \le t \le 1.$$

We krijgen:

$$\int_C \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_0^1 \begin{pmatrix} -t^{13} \\ t^4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2t \\ -3t^2 \end{pmatrix}\mathrm{d}t$$

en dit levert op:

$$\int_0^1 -2t^{14}-3t^6\mathrm{d}t = \left[-\tfrac{2}{15}t^{15}-\tfrac{3}{7}t^7\right]_0^1 = -\tfrac{59}{105}.$$

3.

> Bepaal
>
> $$\iint_S xy\mathrm{d}S$$
>
> met S de rand van het gebied begrensd door de cylinder $x^2+z^2=1$ en de vlakken $y=0$ en $x+y=2$.
> *Let op:* de rand bestaat uit drie stukken.

De rand S bestaat uit drie stukken:

$$\begin{aligned} S_1 &= \left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+z^2=1, \quad 0\le y\le 2-x\right\} \\ S_2 &= \left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 \mid y=0, \quad x^2+z^2\le 1\right\} \\ S_3 &= \left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 \mid y=2-x, \quad x^2+z^2\le 1\right\} \end{aligned}$$

We hebben:

$$\iint_S xy\mathrm{d}S = \iint_{S_1} xy\mathrm{d}S + \iint_{S_2} xy\mathrm{d}S + \iint_{S_3} xy\mathrm{d}S$$

Voor het stuk S_1 gebruiken we als parametrisatie:

$$x = \cos\vartheta, \quad y = y, \quad z = \sin\vartheta.$$

We hebben:

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \vartheta} = \begin{pmatrix} -\sin\vartheta \\ 0 \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

en we vinden:

$$\left| \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial y} \right| = \left| \begin{pmatrix} -\sin\vartheta \\ 0 \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -\cos\vartheta \\ 0 \\ -\sin\vartheta \end{pmatrix} \right| = 1$$

Dit resulteert in:

$$\begin{aligned}
\iint_{S_1} xy \,\mathrm{d}S &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2-\cos\vartheta} y\cos\vartheta \,\mathrm{d}y \mathrm{d}\vartheta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\tfrac{1}{2} y^2 \cos\vartheta\right]_0^{2-\cos\vartheta} \mathrm{d}\vartheta \\
&= \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2}(2-\cos\vartheta)^2 \cos\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta \\
&= \int_0^{2\pi} 2\cos\vartheta - 2\cos^2\vartheta + \tfrac{1}{2}\cos^3\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta \\
&= \int_0^{2\pi} -2\cos^2\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta \\
&= \int_0^{2\pi} -1 - \cos(2\vartheta) \,\mathrm{d}\vartheta \\
&= -2\pi
\end{aligned}$$

waarbij we gebruikt hebben dat op het gegeven interval $\cos\vartheta$ en $\cos^3\vartheta$ gemiddeld gelijk zijn aan nul en dus hun integraal is ook gelijk aan nul.

We hebben:

$$\iint_{S_2} xy \,\mathrm{d}S = 0$$

omdat op S_2 we hebben dat $xy = 0$.

Tot slot moeten we over S_3 integreren. We gebruiken de parameterisatie

$$x = r\cos\vartheta, \quad y = 2 - r\cos\vartheta, \quad z = r\sin\vartheta.$$

We hebben:

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \vartheta} = \begin{pmatrix} -r\sin\vartheta \\ r\sin\vartheta \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta \\ -\cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{pmatrix}$$

en we vinden:

$$\left| \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial y} \right| = \left| r \begin{pmatrix} -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\vartheta \\ -\cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{pmatrix} \right| = \left| r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{2} r$$

Dit resulteert in:

$$\begin{aligned}
\iint_{S_3} xy\,\mathrm{d}S &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{2}r^2 \cos\vartheta\,(2 - r\cos\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}r \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} 2\sqrt{2}r^2 \cos\vartheta - \sqrt{2}r^3 \cos^2\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}r \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} 2\sqrt{2}r^2 \cos\vartheta - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}r^3(\cos(2\vartheta) + 1)\,\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}r \\
&= \int_0^1 -\pi\sqrt{2}r^3\mathrm{d}r \\
&= \left[-\tfrac{1}{4}\pi\sqrt{2}r^4\right]_0^1 \\
&= -\tfrac{1}{4}\pi\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Tot slot:

$$\begin{aligned}
\iint_S xy\,\mathrm{d}S &= \iint_{S_1} xy\,\mathrm{d}S + \iint_{S_2} xy\,\mathrm{d}S + \iint_{S_3} xy\,\mathrm{d}S \\
&= -2\pi + 0 - \tfrac{1}{4}\pi\sqrt{2} \\
&= -(2 + \tfrac{1}{4}\sqrt{2})\pi
\end{aligned}$$