Lijn-, oppervlakte- en flux-integralen

De volgende integralen hebben een samenhang en symmetrie, die in Adams door de verspreide presentatie slecht zichtbaar is:

Scalaire lijnintegraal:	*Sectie 15.3,*	*blz. 821*
Vectoriële lijnintegraal:	*Sectie 15.4,*	*blz. 825*
Oppervlakte-integraal:	*Sectie 15.5,*	*blz. 836*
Fluxintegraal:	*Sectie 15.6,*	*blz. 847*

Daarom zetten we ze hieronder nog eens bij elkaar in de vorm waarin de samenhang het duidelijkst naar voren komt. Merk op, dat de andere vormen waarin ze in Adams ook voorkomen allemaal speciale gevallen zijn van deze grondvorm.

Zij gegeven op $\mathbb{R}^3$ de scalar-waardige functie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ en de vector-waardige functie $\vec{\boldsymbol{F}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Zij gegeven de curve $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ en het oppervlak $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^3$. Curve en opervlak zijn voldoende netjes om oriënteerbaar en parametriseerbaar te zijn.

We kennen aan curve en oppervlak een oriëntatie toe, en noteren de georiënteerde versies $\tilde{\mathcal{C}}$ en $\tilde{\mathcal{A}}$. We introduceren de symboliek van vectoriele infinitesimalen: als $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ het eenheidsraakvectorveld van $\tilde{\mathcal{C}}$ aanduidt, en $\vec{\boldsymbol{n}}$ het eenheidsnormaalvectorveld van $\tilde{\mathcal{A}}$, dan is $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{s}} = \vec{\boldsymbol{\tau}}\,\mathrm{d}s$ en $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}} = \vec{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S$.

We parametriseren de curve met $\vec{\boldsymbol{\gamma}} : [a, b] \to \mathcal{C}$, waarbij $[a, b] \subset \mathbb{R}$. We parametriseren het oppervlak met $\vec{\boldsymbol{\alpha}} : U \to \mathcal{A}$, waarbij $U \subset \mathbb{R}^2$. We kiezen $\vec{\boldsymbol{\gamma}}$ en $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ zo dat $\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\gamma}}}{\mathrm{d}t}$ correspondeert met de oriëntatie van $\tilde{\mathcal{C}}$, en $\frac{\partial\vec{\boldsymbol{\alpha}}}{\partial u} \times \frac{\partial\vec{\boldsymbol{\alpha}}}{\partial v}$ correspondeert met de oriëntatie van $\tilde{\mathcal{A}}$.

Dan is

$\displaystyle\int_{\mathcal{C}} f(\vec{\boldsymbol{x}})\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(\vec{\boldsymbol{\gamma}}(t)) \left\lvert \frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\gamma}}}{\mathrm{d}t} \right\rvert \mathrm{d}t$	$\displaystyle\int_{\mathcal{A}} f(\vec{\boldsymbol{x}})\,\mathrm{d}S = \int_U f(\vec{\boldsymbol{\alpha}}(u, v)) \left\lvert \frac{\partial\vec{\boldsymbol{\alpha}}}{\partial u} \times \frac{\partial\vec{\boldsymbol{\alpha}}}{\partial v} \right\rvert \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$
$\displaystyle\int_{\tilde{\mathcal{C}}} \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{x}}) \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{s}} = \int_a^b \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{\gamma}}(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\gamma}}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t$	$\displaystyle\int_{\tilde{\mathcal{A}}} \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{x}}) \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}} = \int_U \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{\alpha}}(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial\vec{\boldsymbol{\alpha}}}{\partial u} \times \frac{\partial\vec{\boldsymbol{\alpha}}}{\partial v} \right) \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$

Zowel de scalaire als de vectoriële integraal langs $\mathcal{C}$ heet “lijnintegraal”. De gewone integraal over $\mathcal{A}$ heet “oppervlakte-integraal”, en de vectoriële versie heet “fluxintegraal”.

Let op het teken van de uitkomst in de gevallen van de georiënteerde curve resp. oppervlak: dit hangt dus van de oriëntatie, d.w.z. parametrisatie af.

SW Rienstra 20-01-08