TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Tentamen Functies van meerdere variabelen, deel A (2XE06) op vrijdag 17 maart 2006, 9.00 - 10.30 uur

De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden. Bovendien dient u in alle gevallen uw antwoord te beargumenteren.

Een **niet-grafische** rekenmachine is toegestaan.

---

1. Gegeven is de functie $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ met
$$f(x,y) = (y - x^2)\, e^{2x+y}.$$
   (a) Punt $(-2,4)$ ligt op de hoogtelijn C met vergelijking $f(x,y) = f(-2,4)$. Bereken de gradiënt ∇f in $(-2,4)$ en teken ∇f en de hoogtelijn C in één figuur.
   (b) Bereken de richtingsafgeleide van f in het punt $(-2,4)$ in de richting $(1,-1)$.
   (c) In welke richting vanuit punt $(-2,4)$ daalt de functiewaarde $f(x,y)$ het sterkste?
   (d) Bepaal de vergelijking van de raaklijn aan de hoogtelijn C in het punt $(-2,4)$ en teken deze raaklijn in dezelfde figuur als waarin C getekend is.
   (e) Bepaal het raakvlak aan de grafiek van f in het punt $(-2,4,f(-2,4))$

2. Bereken
$$\int_0^2 \left(\int_{2-x}^2 e^{y^2}\, dy \right) dx + \int_2^4 \left(\int_{x-2}^2 e^{y^2}\, dy \right) dx$$
Aanwijzing: verwissel de integratievolgorde.

3. De vergelijking $xy = z - \dfrac{4x}{z^2}$ beschrijft een oppervlak S in $\mathbb{R}^3$.
Locaal rond het punt $(x,y,z) = (1,1,2)$ geldt $z = z(x,y)$.
Bereken $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ en $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ in $(1,1,2)$.

4. Een gebied G is op de volgende wijze beschreven in Cartesische coördinaten (x,y,z): G is het gebied onder de paraboloïde P_1 met vergelijking $z = 16 - x^2 - y^2$, boven de paraboloïde P_2 met vergelijking $z = x^2 + y^2 - 16$, en binnen de cilinder C met vergelijking $x^2 + (y-2)^2 = 4$.
   (a) Toon aan dat de cilinder C in cilindercoördinaten wordt beschreven door de vergelijking $r = 4\sin\theta$ met $0 \le \theta \le \pi$.
   Leg uit dat C een cirkelvormige dwarsdoorsnede heeft en loodrecht staat op het $xy-$vlak.
   (b) Bereken $\displaystyle\iiint_G \frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdydz$.

Z.O.Z.

Voor de vraagstukken kunnen de volgende aantallen punten worden behaald:

1a	1b	1c	1d	1e	2	3	4a	4b
5	3	1	2	2	8	4	5	10

Het cijfer wordt bepaald **in één decimaal achter de komma** door het totaal der behaalde punten door 4 te delen.

In de volgende tabel zijn α en β reële getallen en is a een positief reëel getal.

1. $\displaystyle\int x^\alpha\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha+1}\,x^{\alpha+1} + C & \text{als } \alpha \neq -1 \\ \ln|x| + C & \text{als } \alpha = -1 \end{cases}$

2. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$

3. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

4. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha}}\,dx = \ln|x+\sqrt{x^2+\alpha}| + C$

5. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{a} + C$

6. $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

7. $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C$

8. $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx = \tfrac{1}{2}(x - \sin x\cos x) + C$

9. $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx = \tfrac{1}{2}(x + \sin x\cos x) + C$

10. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \ln|\tan\frac{x}{2}| + C$

11. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$

12. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\frac{\cos x}{\sin x} + C$

13. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$

14. $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C$

15. $\displaystyle\int e^{\alpha x}\,\sin\beta x\,dx = \frac{e^{\alpha x}\,(\alpha\sin\beta x - \beta\cos\beta x)}{\alpha^2+\beta^2} + C \quad \text{als } \alpha^2+\beta^2>0$

16. $\displaystyle\int e^{\alpha x}\,\cos\beta x\,dx = \frac{e^{\alpha x}\,(\alpha\cos\beta x + \beta\sin\beta x)}{\alpha^2+\beta^2} + C \quad \text{als } \alpha^2+\beta^2>0$

TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Uitwerkingen Tentamen Functies van meerdere variabelen, deel A (2XE06) op vrijdag 17 maart 2006, 9.00 - 10.30 uur

---

1. Gegeven is de functie $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ met
$$f(x,y) = (y - x^2)\, e^{2x+y}.$$
   (a) Hoogtelijn C heeft vergelijking $f(x,y) = f(-2,4)$ ofwel $(y-x^2)\,e^{2x+y} = 0$, ofwel $y - x^2 = 0$.
   Gradiënt $\nabla f(x,y) = ((-2x + 2(y-x^2))e^{2x+y}, (1+y-x^2)e^{2x+y})$,
   dus $\nabla f(-2,4) = (4,1)$.
   (b) De richtingsafgeleide van f in het punt $(-2,4)$ in de richting $(1,-1)$ is,
   $D_{\mathbf{u}} f(-2,4) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)\cdot\nabla f(-2,4) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(4-1) = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$.
   (c) Vanuit punt $(-2,4)$ daalt de functiewaarde $f(x,y)$ het sterkste in de richting $-\nabla f(-2,4)$.
   (d) $\nabla f(-2,4) \perp$ raaklijn aan de hoogtelijn C in het punt $(-2,4)$,
   dus vergelijking wordt $4(x-(-2)) + 1(y-4) = 0$ ofwel $y = -4(x+1)$.
   (e) Raakvlak aan de grafiek van f in het punt $(-2,4,f(-2,4))$ wordt
   $z - f(-2,4) = f_x(-2,4)(x+2) + f_y(-2,4)(y-4)$, waaruit volgt $z = 4x+4+y$.

2. $G = \{(x,y) | 0 \le x \le 2, 2-x \le y \le 2\} \cup \{(x,y) | 2 \le x \le 4, x-2 \le y \le 2\}$.
   $G = \{(x,y) | 0 \le y \le 2, 2-y \le x \le 2+y\}$.
$$\int_0^2 \left(\int_{2-x}^2 e^{y^2}\,dy\right)dx + \int_2^4 \left(\int_{x-2}^2 e^{y^2}\,dy\right)dx = \int_0^2 \left(\int_{2-y}^{2+y} e^{y^2}\,dx\right)dy = \int_0^2 2ye^{y^2}dy = e^4 - 1.$$

3. Differentieer de vergelijking $xy = z - \dfrac{4x}{z^2}$ naar x.
$$y = \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{4z^2 - 8xz\frac{\partial z}{\partial x}}{z^4}.$$
   Invullen punt $(1,1,2)$ geeft na wat rekenen uiteindelijk $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 1$.
   Analoog: $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{2}$.

4. Een gebied G is op de volgende wijze beschreven in Cartesische coördinaten (x, y, z): G is het gebied onder de paraboloïde P_1 met vergelijking $z = 16 - x^2 - y^2$, boven de paraboloïde P_2 met vergelijking $z = x^2 + y^2 - 16$, en binnen de cilinder C met vergelijking $x^2 + (y-2)^2 = 4$.

   (a) De cilinder C heeft vergelijking $x^2 + (y-2)^2 = 4$. Poolcoördinaten in $xy-$vlak en Cartesische $z-$coördinaat geven: $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z$. Deze ingevuld in vergelijking $x^2 + (y-2)^2 = 4$ levert na enig rekenen de vergelijking in cilindercoördinaten: $r = 4\sin\theta$ met $0 \leq \theta \leq \pi$.

   $C \perp xy-$ vlak omdat de vergelijking in poolcoördinaten alleen een relatie tussen r, θ legt en de z vrij laat.

   (b) $G = \{[r, \theta, z] |\ 0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq r \leq 4\sin\theta,\ r^2 - 16 \leq z \leq 16 - r^2\}$.

   $$\iiint\limits_G \frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdydz = \int_0^{\pi}\left(\int_0^{4\sin\theta}\left(\int_{r-16}^{16-r^2} 2\sin\theta dz\right) rdr\right) d\theta =$$

   $$\int_0^{\pi}\left(\int_0^{4\sin\theta} 4(16-r^2)rdr\right)\sin\theta d\theta = \int_0^{\pi}\left(\left[-(16-r^2)^2\right]_0^{4\sin\theta}\right)\sin\theta d\theta =$$

   $$256\int_0^{\pi}(1-\cos^4\theta)\sin\theta d\theta = \frac{2048}{5}$$