TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Tentamen Functies van meer variabelen, deel A (2XE06) op maandag 2 mei 2005, 9.00 – 10.30 uur.

De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden. Bovendien dient U in alle gevallen uw antwoord te beargumenteren!

Een **niet-grafische** rekenmachine is toegestaan.

---

1. Beschouw de functie f gegeven door:

$$f(x,y) = \frac{y\sin x}{2+\sin(2xy)}$$

   Bereken de vergelijking van het raakvlak in het punt $(\frac{\pi}{2}, 1, \frac{1}{2})$ aan de grafiek van de functie f.

2. Bereken de lijnintegraal:

$$\int_{\mathcal{K}} x^2 \, \mathrm{d}s.$$

   Hierbij is $\mathcal{K}$ de doorsnijdingskromme van de cylinder $x^2 + y^2 = 4x$ en het vlak $z = 1$.

3. Bereken

$$\iint_S x \, \mathrm{d}A.$$

   Hier is S de driehoek beschreven door $x \le 1$, $y \ge 0$ en $x \ge y$.

4. Definieer de functie $f(x,y)$ door:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+(\sin y)^2} & \text{als } (x,y) \neq (0,k\pi) \text{ voor alle gehele getallen } k, \\ 0 & \text{als } (x,y) = (0,k\pi) \text{ voor zekere gehele } k. \end{cases}$$

   Is de functie f continu in $(0,0)$? Beargumenteer uw antwoord !

5. De functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is gedefinieerd door:

$$f(x,y) = y\sin(xy).$$

   Bereken de richtingsafgeleide in het punt $(\frac{\pi}{2}, 1)$ in de richting $(3,4)$.

Voor de vraagstukken kunnen de volgende aantallen punten worden behaald:

Vraagstuk	1.	8 punten	Vraagstuk	2.	10 punten	Vraagstuk	3.	10 punten
Vraagstuk	4.	6 punten	Vraagstuk	5.	6 punten			

Het cijfer wordt bepaald door het totaal der behaalde punten door 4 te delen.

TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Uitwerking tentamen Functies van meer variabelen, deel A (2XE06) op maandag 2 mei 2005, 9.00 – 10.30 uur.

1.

> Beschouw de functie f gegeven door:
>
> $$f(x,y) = \frac{y\sin x}{2+\sin(2xy)}$$
>
> Bereken de vergelijking van het raakvlak in het punt $(\frac{\pi}{2}, 1, \frac{1}{2})$ aan de grafiek van de functie f.

We hebben:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y\cos x}{2+\sin(2xy)} - \frac{2y^2\sin x\cos(2xy)}{(2+\sin(2xy))^2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\sin x}{2+\sin(2xy)} - \frac{2xy\sin x\cos(2xy)}{(2+\sin(2xy))^2}.$$

We vinden:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\tfrac{\pi}{2},1) = \tfrac{1}{2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(\tfrac{\pi}{2},1) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{\pi}{4}.$$

De vergelijking van het raakvlak wordt dus gegeven door:

$$z - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}(x - \tfrac{\pi}{2}) + (\tfrac{1}{2} + \tfrac{\pi}{4})(y-1),$$

of

$$2x + (2+\pi)y - 4z = 2\pi.$$

2.

> Bereken de lijnintegraal:
>
> $$\int_{\mathcal{K}} x^2\,\mathrm{d}s.$$
>
> Hierbij is $\mathcal{K}$ de doorsnijdingskromme van de cylinder $x^2+y^2 = 4x$ en het vlak $z = 1$.

We moeten deze kromme eerst parameteriseren. Nu beschrijft

$$x^2 + y^2 = 4x$$

wel een cirkel in het x,y-vlak maar niet door de oorsprong. Met kwadraatafsplitsen krijgen we:

$$(x-2)^2 + y^2 = 4$$

en we parameteriseren dit met:

$$x = 2 + 2\cos\varphi, \quad y = 2\sin\varphi.$$

De integraal is dan gelijk aan:

$$\int_{\mathcal{K}} x^2\,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} (2+2\cos\varphi)^2 \sqrt{(\tfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi})^2 + (\tfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varphi})^2 + (\tfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\varphi})^2}\,\mathrm{d}\varphi.$$

We krijgen:

$$\int_0^{2\pi} 2(2+2\cos\varphi)^2\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} 8 + 8\cos\varphi + 8\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

Als we gebruiken dat

$$\cos(2\varphi) = 2\cos^2\varphi - 1$$

vinden we:

$$\int_0^{2\pi} 12 + 8\cos\varphi + 4\cos(2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$$

en dit resulteert in:

$$[12\varphi + 8\sin\varphi + 2\sin(2\varphi)]_0^{2\pi} = 24\pi.$$

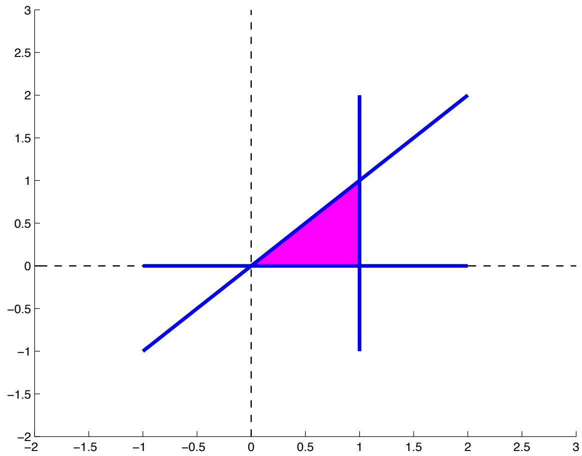
3.

Bereken

$$\iint_S x\,\mathrm{d}A.$$

Hier is S de driehoek beschreven door $x \le 1$, $y \ge 0$ en $x \ge y$.

Eerst tekenen we het gebied:



We hebben dus:

$$0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le x.$$

We krijgen

$$\begin{aligned}
\iint_S x\,\mathrm{d}A &= \int_0^1 \int_0^x x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 [xy]_{y=0}^x\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_0^1 \\
&= \tfrac{1}{3}.
\end{aligned}$$

4.

Definieer de functie $f(x,y)$ door:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+(\sin y)^2} & \text{als } (x,y) \neq (0,k\pi) \text{ voor alle gehele getallen } k, \\ 0 & \text{als } (x,y) = (0,k\pi) \text{ voor zekere gehele } k. \end{cases}$$

Is de functie f continu in $(0,0)$? Beargumenteer uw antwoord !

We lopen langs verschillende kanten naar $(0,0)$. Stel dat $x = ay$. Dan vinden we:

$$\lim_{y\downarrow 0} f(ay,y) = \lim_{y\downarrow 0} \frac{ay^2}{a^2y^2 + (\sin y)^2}.$$

Om deze limiet te berekenen kunnen we teller en noemer delen door y^2 en de standaardlimiet gebruiken:

$$\lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$$

met als resultaat:

$$\lim_{y\downarrow 0} \frac{ay^2}{a^2y^2 + (\sin y)^2} = \frac{a}{a^2+1}$$

We kunnen ook l'Hôpital gebruiken want teller en noemer gaan naar nul en we vinden:

$$\lim_{y\downarrow 0} \frac{ay^2}{a^2y^2 + (\sin y)^2} = \lim_{y\downarrow 0} \frac{2ay}{2a^2y + 2\sin y\cos y}.$$

Hierna gaat nog steeds teller en noemer naar nul maar nog een keer l'Hôpital gebruiken levert op:

$$\lim_{y\downarrow 0} \frac{2ay}{2a^2y + 2\sin y\cos y} = \lim_{y\downarrow 0} \frac{2a}{2a^2 + 2\cos^2 y - 2\sin^2 y} = \frac{a}{a^2+1}.$$

De limiet is niet gelijk aan 0 (tenzij toevallig $a = 0$ wordt gekozen). Voor continuïteit moet er altijd 0 uitkomen en dat is niet het geval en dus is de functie niet continu.

De functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is gedefinieerd door:

$$f(x,y) = y\sin(xy).$$

Bereken de richtingsafgeleide in het punt $(\frac{\pi}{2}, 1)$ in de richting $(3,4)$.

We hebben:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 \cos(xy), \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \sin(xy) + yx\cos(xy),$$

en de gradiëntvector in $(\frac{\pi}{2}, 1)$ is dus gelijk aan

$$(0, 1)\,.$$

De richtingsafgeleide is het inproduct van de gradiëntvector met de richting maar dan moet die richtingsvector wel lengte 1 hebben. In ons geval is de lengte van de richtingsvector gelijk aan:

$$\sqrt{9+16} = 5$$

en de richtingsvector met lengte 1 is dus gelijk aan:

$$\tfrac{1}{5}(3, 4).$$

Het inproduct hiervan met de gradiëntvector levert op:

$$\tfrac{1}{5}\,(0+4) = \frac{4}{5},$$

en de richtingsafgeleide is dus $\frac{4}{5}$.