Taylor-reeks en Taylor-polynoom in 1 en meer dimensies

1. **Een-dimensionaal.**

   - We kennen de Taylorreeks rond $x = 0$ voor de ∞-differentieerbare functie $f(x)$

     $$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + x f'(0) + \tfrac{1}{2}x^2 f''(0) + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0). \end{aligned}$$

     Let op: het "=" -teken geldt voor alle x binnen de convergentiestraal van de reeks.

   - Het bijbehorende N-de graads Taylorpolynoom

     $$P_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0)$$

     is een benadering van $f(x)$ in de buurt van $x = 0$, en wel een steeds betere naarmate we N groter kiezen.

     $P_N(x)$ is in de volgende zin de beste benadering van $f(x)$: van alle mogelijke N-de graads polynomen gaat met P_N het verschil $|f(x) - P_N(x)|$ het snelst naar nul als $|x| \to 0$.

   - Een praktisch al heel belangrijke benadering is het 1-ste graads Taylorpolynoom

     $$P_1(x) = f(0) + x f'(0),$$

     ook wel genoemd de 1-ste orde, of lineaire benadering van $f(x)$ in $x = 0$.
     $y = P_1(x)$ beschrijft de raaklijn aan de grafiek van $f(x)$ in $x = 0$.

   - Iets meer informatie van het gedrag van f nabij $x = 0$ geeft het 2-ste graads Taylorpolynoom

     $$P_2(x) = f(0) + x f'(0) + \tfrac{1}{2}x^2 f''(0),$$

     ook wel genoemd de 2-de orde, of kwadratische benadering van $f(x)$ in $x = 0$.

   - Als $f(x)$ in $x = 0$ een kritisch punt heeft (d.w.z. $f'(0) = 0$), dan heeft f daar een maximum, minimum, of een buigpunt. Uit het 2-de graads Taylorpolynoom volgt dat als $f''(0) > 0$ of < 0, dan is het kritisch punt een minimum, resp. een maximum. Als $f''(0) = 0$, dan moeten we naar het 3e graads Taylorpolynoom kijken. Als $f'''(0) \neq 0$ hebben we een buigpunt. Als $f'''(0) = 0$ en $f''''(0) \neq 0$ dan hebben we weer een minimum of maximum, enzovoorts.

   - Alles gaat natuurlijk analoog voor $x = a$, in plaats van $x = 0$. Overal waar in het rechterlid van de formules x staat, vervangen we dit door $x - a$. Bijvoorbeeld

     $$f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + \tfrac{1}{2}(x-a)^2 f''(a) + \dots$$

     etc.

2. **Hoger-dimensionaal.** De gewone Taylorreeks wordt op voor de hand ligende wijze gegeneraliseerd naar hogere dimensies, d.w.z. met meer afhankelijke variabelen. We houden het hier voor de overzichtelijkheid op dimensie 2, en de functie heet nu $f(x, y)$.

- We beginnen maar eens met het negeren van de y-afhankelijkheid. Dan staat er niets nieuws. De Taylorreeks rond $x = 0$ is gewoon

$$f(x,y) = f(0,y) + x f_x(0,y) + \tfrac{1}{2}x^2 f_{xx}(0,y) + \tfrac{1}{6}x^3 f_{xxx}(0,y) + \dots$$

Iedere term is nu echter ook een functie van y die we kunnen ontwikkelen in een Taylorreeks in y rond $y = 0$.

$$\begin{aligned} f(x,y) = f(0,0) + y f_y(0,0) + \tfrac{1}{2}y^2 f_{yy}(0,0) + \ & \tfrac{1}{6}y^3 f_{yyy}(0,0) + \\ x f_x(0,0) + \ xy f_{xy}(0,0) + \ & \tfrac{1}{2}xy^2 f_{xyy}(0,0) + \\ \tfrac{1}{2}x^2 f_{xx}(0,0) + \ & \tfrac{1}{2}x^2 y f_{xxy}(0,0) + \\ & \tfrac{1}{6}x^3 f_{xxx}(0,0) + \ \dots \end{aligned}$$

Dit wordt

$$f(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{m=0}^{n} \frac{x^m\, y^{n-m}}{m!(n-m)!}\, \frac{\partial^n}{\partial x^m \partial y^{n-m}}\, f(0,0)\Big)$$

Let op de telling in de binnen-som! We nemen telkens die termen bij elkaar waarvan de som van de afgeleiden gelijk is aan n. Zo'n term heet van de orde n, omdat bij lineaire schaling $x = h\xi$, $y = h\eta$ volgt $x^m y^{n-m} = h^n \xi^m \eta^{n-m}$. Dit is van belang als $x, y \to 0$. Beschouw namelijk in poolcoördinaten $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Dan is

$$x^m y^{n-m} = r^n \cos^m\theta \sin^{n-m}\theta = O(r^n) \ \text{ als } \ r \to 0.$$

- Merk op:

$$\frac{1}{m!(n-m)!} = \frac{1}{n!}\frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{1}{n!}\binom{n}{m}$$

zodat de formule wordt

$$f(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} x^m y^{n-m}\, \frac{\partial^n}{\partial x^m \partial y^{n-m}}\, f(0,0)\right)$$

- Het bijbehorende N-de graads Taylorpolynoom

$$P_N(x,y) = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}\left(\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} x^m y^{n-m}\, \frac{\partial^n}{\partial x^m \partial y^{n-m}}\, f(0,0)\right)$$

is dan een "beste" N-de orde polynoombenadering van $f(x)$ in de buurt van $(0,0)$.
De vergelijking $z = P_N(x,y)$ beschrijft een (i.h.a. gekromd) vlak dat in $(0,0)$ raakt aan het oppervlak $z = f(x,y)$,

- De lineaire of 1-ste orde benadering van f

$$P_1(x,y) = f + x f_x + y f_y$$

beschrijft het raakvlak aan de grafiek van f in $(0,0)$.

- De 2-de orde benadering van f is het gekromde oppervlak

$$P_2(x,y) = f + x f_x + y f_y + \tfrac{1}{2}x^2 f_{xx} + xy f_{xy} + \tfrac{1}{2}y^2 f_{yy}$$

dat een (platgedrukte) paraboloide kan zijn of een zadelvlak.

- Alles gaat geheel analoog voor het punt (a,b) in plaats van $(0,0)$. Overal waar in het rechterlid van de formules x staat, vervangen we dit door $x - a$, en idem voor y door $y - b$. Analoog wordt $f_{..}(0,0)$ vervangen door $f_{..}(a,b)$.