S.W.Rienstra 26-8-2004

Beknopt overzicht: hoe zoeken we naar extreme waarden.

Zij gegeven de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met definitiegebied $\mathcal{D}$. We onderzoeken f op extreme waarden.

Absolute extremen

(*Definitie.*) Als voor een $x_0 \in \mathcal{D}$ en alle $x \in \mathcal{D}$ geldt: $f(x) \leq f(x_0)$, dan heeft f een absoluut maximum $f(x_0)$ in $x = x_0$. Analoog voor absoluut minimum.

Lokale extremen

(*Definitie.*) Als er bij een $x_0 \in \mathcal{D}$ een $h > 0$ bestaat, zo dat voor alle $x \in \mathcal{D}$ met $|x - x_0| < h$ geldt: $f(x) \leq f(x_0)$, dan heeft f een lokaal maximum $f(x_0)$ in $x = x_0$. Analoog voor lokaal minimum.

(*Stelling.*) Een absoluut extreem is tevens een lokaal extreem.

Bestaan van extreme waarden

(*Stelling.*) Als $\mathcal{D}$ bestaat uit een <u>gesloten eindig interval</u>, $[a, b]$, en f is <u>continu</u> op $\mathcal{D}$, dan heeft f een absoluut maximum en een absoluut minimum.

Ligging van extreme waarden

(*Stelling.*) Een differentieerbare f <u>kan</u> lokale extremen <u>slechts</u> hebben in de volgende punten:

(i) <u>kritieke punten</u> van f: punten $x_0 \in \mathcal{D}$ waar $f'(x_0) = 0$.

(ii) <u>singuliere punten</u> van f: punten $x_0 \in \mathcal{D}$ waar f' niet bestaat.

(iii) <u>eindpunten</u> van $\mathcal{D}$: punten $x_0 \in \mathcal{D}$ waarvoor geen enkele $h > 0$ bestaat met $(x_0 - h, x_0 + h) \subset \mathcal{D}$.

De 1ste-afgeleide test

(*Stelling.*) Stel: $\mathcal{D}$ is een interval, f is continu in $x_0 \in \mathcal{D}$, en f is differentieerbaar in een omgeving van x_0. $f(x_0)$ moet wèl, maar $f'(x_0)$ hoeft niet te bestaan! (Maak plaatje.)

I. x_0 is <u>geen eindpunt</u> van $\mathcal{D}$.
Als er een open interval $(x_0 - h, x_0 + h)$ bestaat, zo dat f' van teken wisselt <u>slechts</u> in x_0 dan heeft f daar een lokaal extreem. In het bijzonder:

(i) lokaal maximum als $f'(x) > 0$ links van x_0, en $f'(x) < 0$ rechts van x_0.

(ii) lokaal minimum als $f'(x) < 0$ links van x_0, en $f'(x) > 0$ rechts van x_0.

II. x_0 is <u>een eindpunt</u> van $\mathcal{D}$.
Als f' nabij x_0 tekenvast is dan heeft f een lokaal extreem in x_0. In het bijzonder:

(i) als x_0 is linkereindpunt van $\mathcal{D}$, en op een interval (x_0, h) is

a) $f'(x) < 0$, dan lokaal maximum,

b) $f'(x) > 0$, dan lokaal minimum.

(ii) als x_0 is rechtereindpunt van $\mathcal{D}$: idem, maar gespiegeld.

Open intervallen

(*Stelling.*) Op een open interval (a, b) weten we niet zomaar of er wel extremen bestaan. We kunnen echter wel wat doen als de limiet van f naar de randpunten bestaat, of f neemt onbegrensd toe of af. Als f continu is op (a, b), terwijl

$$\lim_{x\downarrow a} f(x) = L, \quad \lim_{x\uparrow b} f(x) = M$$

(eventueel is $L, M = \pm\infty$) en er is een punt $x_0 \in (a, b)$, zodanig dat

1) $f(x_0) > L, > M$ dan heeft f een maximum op (a, b).

2) $f(x_0) < L, < M$ dan heeft f een minimum op (a, b).

Merk op: het sterke van de stelling zit erin dat a, b, L, en M eventueel $\pm\infty$ mogen zijn!

Stap voor stap:

Het zoeken naar de extremen van een functie moet een logische opbouw hebben, en iedere conclusie moet beargumenteerd zijn. Eerst kijk je of de functie wel extremen heeft. Dan zoek je naar de lokale extremen en je bepaalt hun karakter. Tenslotte selecteer je uit de lokale extremen de absolute extremen.

1. Maak een schetsje van de grafiek van f om enig idee te krijgen.
2. Is f continu en gedefinieerd op een enkel interval?
   i. Zo ja, dan gaan we verder.
   ii. Zo nee, probeer dan het definitiegebied op te splitsen in deelintervallen waarop f continu is. Ieder interval behandelen we apart.
4. Is het interval gesloten en eindig?
   i. Zo ja, dan bestaat een maximum en een minimum.
   ii. Zo nee, kijk dan of de limieten naar de randpunten bestaan (eventueel in de vorm van een onbegrensde limiet "$\pm\infty$"), vergelijk deze met een geschikt middenpunt, en trek de bijpassende conclusies.
5. Bestaan er extremen, en is f, eventueel op losse punten na, differentieerbaar? Dan kijken we naar
   i. kritieke punten ($f' = 0$),
   ii. singuliere punten (f' bestaat niet),
   iii. randpunten.
6. Onderzoek aan de hand van het teken van f' in de buurt van zo'n punt, of f daar een lokaal minimum of maximum heeft.
   Selecteer uit de gevonden lokale extremen de absolute extremen.