TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Tentamen Functietheorie (2Y480) op 23 januari 2002, 9.00-12.00 uur

De uitwerkingen der opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden.

---

1. Van een gehele functie $f(z)$ is gegeven dat Re $f(z) = x^2y^2$, waar de reële getallen x en y bepaald worden door $z = x + iy$. Kan dit? Zo ja, geef dan tenminste één voorbeeld van zo'n gehele functie $f(z)$. Zo nee, geef aan waarom niet.

2. Bepaal de functie $f(z)$ met de volgende eigenschappen:

   (a) $f(z)$ is begrensd voor $|z| > 3$.

   (b) $f(z)$ is overal analytisch behoudens twee singulariteiten, een pool van de eerste orde in $z = -1$ met residu 1, en een pool van de tweede orde in $z = 2$ met residu -2.

   (c) $f(0) = \frac{7}{4}$ en $f(1) = \frac{5}{2}$.

3. Voor $R > 0$, $R \neq 1$, $R \neq 2$ definiëren we

$$I_R := \int_{|z|=R} \frac{dz}{(z^2-1)^5(z-2)^2}.$$

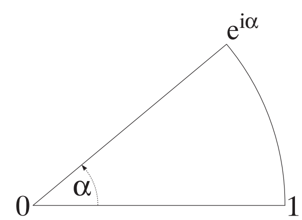
   (a) Laat zien dat $I_R = 0$ voor $R > 2$.

   (b) Bereken I_R voor de andere waarden van R waarvoor I_R gedefinieerd is.

4. Bereken

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{17 + 8\cos\varphi}.$$

5. Zij $0 < \alpha < 2\pi$. Bereken $\int_K \bar{z}\, dz$, waar K de Jordankromme is die bestaat uit het rechte lijnstuk van $z = 0$ naar $z = 1$, de cirkelboog om $z = 0$ van $z = 1$ naar $z = e^{i\alpha}$ en het rechte lijnstuk van $z = e^{i\alpha}$ naar $z = 0$ (zie figuur).



Normering:

1	2	3	4	5
		a b		
10	10	3 7	10	10

TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Uitwerking van het tentamen Functietheorie (2Y480) op 23 januari 2002, 9.00-12.00 uur

---

OPGAVE 1 *Van een gehele functie $f(z)$ is gegeven dat* $\mathrm{Re}\, f(z) = x^2y^2$, *waar de reële getallen x en y bepaald worden door $z = x + iy$. Kan dit? Zo ja, geef dan tenminste één voorbeeld van zo'n gehele functie $f(z)$. Zo nee, geef aan waarom niet.*

OPLOSSING: We schrijven $u(x, y) := \mathrm{Re}\, f(x + iy) = x^2y^2$.

Eerste Methode: Wil zo'n functie bestaan, dan moet $u(x, y)$ overal harmonisch zijn, d.w.z. voldoen aan de potentiaalvergelijking $u_{xx} + u_{yy} = 0$. Hier geldt $u_{xx} + u_{yy} = 2y^2 + 2x^2 \neq 0$. Zo'n functie kan dus niet bestaan.

Tweede Methode: We proberen $v(x, y) := \mathrm{Im}\, f(x + iy)$ te bepalen. De functies u en v voldoen aan de Cauchy-Riemann-vergelijkingen. We vinden hieruit:

$$\begin{aligned} v_x &= -u_y = 2x^2y, \\ v_y &= \;\;\, u_x \;= 2xy^2. \end{aligned}$$

Uit de eerste vergelijking volgt

$$v(x, y) = \frac{2}{3}x^3y + f(y),$$

waar f niet van x afhangt. Differentiëren we deze vergelijking naar y, dan vinden we

$$v_y(x, y) = \frac{2}{3}x^3 + f'(y) = 2xy^2.$$

Omdat f' ook niet van x kan afhangen, vinden we hier een tegenspraak (vul bijvoorbeeld achtereenvolgens $x = 0$ en $x = 1$ in. $\square$

OPGAVE 2 *Bepaal de functie $f(z)$ met de volgende eigenschappen:*

1. *$f(z)$ is begrensd voor $|z| > 3$.*
2. *$f(z)$ is overal analytisch behoudens twee singulariteiten, een pool van de eerste orde in $z = -1$ met residu 1, en een pool van de tweede orde in $z = 2$ met residu -2.*
3. *$f(0) = \frac{7}{4}$ en $f(1) = \frac{5}{2}$.*

OPLOSSING: De functie $g(z) := (z+1)(z-2)^2 f(z)$ heeft geen singulariteiten, en is dus een gehele functie. We weten dat $f(z)$ begrensd, zeg $|f(z)| \leqslant M$, is voor $|z| > 3$. Daarom geldt voor $R := |z| > 3$:

$$|g(z)| \leqslant |z+1| \cdot |z-2|^2 |f(z)| \leqslant (R+1)(R+2)^2 M \leqslant 8MR^3,$$

waar we gebruikt hebben dat $R+1 < 2R$, $R+2 < 2R$ voor $R > 3$. Uit de gegeneraliseerde stelling van Liouville (Stelling 7.5 van het dictaat) volgt nu dat $g(z)$ een polynoom is met graad $\leqslant 3$. De functie $g(z)$ is dus van de vorm $g(z) = az^3 + bz^2 + cz + d$, met nog nader te bepalen coëfficiënten a, b, c, d. Deze coëfficiënten bepalen we uit de verdere gegevens.

1. $f(0) = \frac{7}{4}$ geeft $d = g(0) = 4f(0) = 7$.
2. $f(1) = \frac{5}{2}$ geeft $a + b + c + d = g(1) = 2f(1) = 5$.
3. $\operatorname{Res}_{z=-1} f(z) = 1$. Merk op dat $z = -1$ een enkelvoudige pool is van $f(z)$, dus dat

   $$\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z) = \lim_{z \to -1} (z+1) f(z) = (-a + b - c + d)/9$$

   We concluderen dat $-a + b - c + d = 9$.
4. $\operatorname{Res}_{z=2} f(z) = -2$. Omdat $z = 2$ een dubbele pool is van $f(z)$ volgt uit Regel II (8.5) dat

   $$\operatorname*{Res}_{z=2} f(z) = \operatorname*{Res}_{z=2} \frac{g(z)/(z+1)}{(z-1)^2} = \left(\frac{az^3 + bz^2 + cz + d}{z+1} \right)' \Bigg|_{z=2} = \frac{28a + 8b + c - d}{9} = -2$$

Op deze manier vinden we vier vergelijkingen met vier onbekenden, te weten:

$$\begin{aligned} d &= 7, \\ a + b + c + d &= 5, \\ -a + b - c + d &= 9, \\ 28a + 8b + c - d &= -18. \end{aligned}$$

Dit levert $a = -\frac{1}{3}$, $b = 0$, $c = -\frac{5}{3}$, $d = 7$. Dus

$$f(z) = \frac{-z^3 - 5z + 21}{3(z+1)(z-2)^2}.$$

□

OPGAVE 3 *Voor $R > 0$, $R \neq 1$, $R \neq 2$ definiëren we*

$$I_R := \int_{|z|=R} \frac{dz}{(z^2-1)^5(z-2)^2}.$$

1. *Laat zien dat $I_R = 0$ voor $R > 2$.*
2. *Bereken I_R voor de andere waarden van R waarvoor I_R gedefinieerd is.*

OPLOSSING:We geven de cirkel met middelpunt 0 en straal R aan met C_R. Dus

$$C_R := \{z \in \mathbb{C} \big| |z| = R\}.$$

1. We gebruiken de ongelijkheid

   $$\left| \int_{C_R} f(z)\, dz \right| \leqslant ML,$$

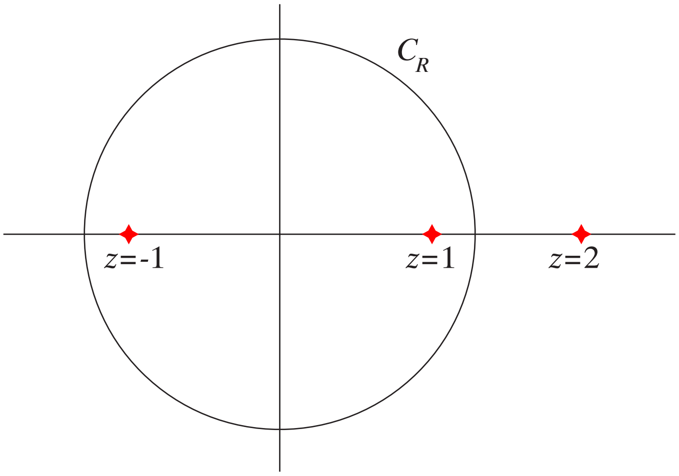
   waar L de lengte van de integratieweg en M een bovengrens is voor de modulus van de integrand. Hier is $L = 2\pi R$, en voor de integrand $f(z) := 1/((z^2-1)^5(z-2)^2)$ geldt

   $$|f(z)| \leqslant \frac{1}{(R^2-1)^5(R-2)^2} =: M.$$

   We hebben hier gebruikt dat $|z^2 - 1| \geqslant ||z^2| - 1| = |R^2 - 1|$ en $|z - 2| \geqslant R - 2$ geldt voor $z \in C_R$ en $R > 2$. We concluderen $|I_R| \leqslant 2\pi R/((R^2-1)^5(R-2)^2) \to 0$ voor $R \to \infty$. Volgens de stelling van Cauchy is de integraal echter onafhankelijk van R. We vinden dus dat $I_R = 0$ voor alle $R > 2$.

2. De singuliere punten van $f(z)$ zijn $z = \pm 1$, twee polen van de vijfde orde, en $z = 2$, een pool van de tweede orde. Als $R < 1$ ligt er geen pool binnen C_R. Daarom is dan $I_R = 0$. Als $1 < R < 2$, liggen er twee polen binnen C_R, beide van de vijfde orde. Het is te veel rekenwerk om de residuen hiervan te bepalen. Daarom maken we gebruik van het vorige resultaat. Als $R > 2$, is I_R gelijk aan de som van de residuen van alledrie de polen. Zoals we in 1. gezien hebben is deze integraal dan gelijk aan nul. Dit betekent dat de som van de residuen in de

drie polen gelijk aan nul is. De som van de residuen van de twee polen van de vijfde orde is dus gelijk aan $-\operatorname{Res}_{z=2} f(z) = [-((z^2-1)^{-5})']_{z=2} = [10z(z^2-1)^{-6}]_{z=2} = 20/729$, waar we Regel II (8.5) van het dictaat hebben toegepast.



Resumerend, hebben we de volgende resultaten:

$$I_R = \begin{cases} 0 & (0 < R < 1), \\ 40\pi i/729 & (1 < R < 2), \\ 0 & (R > 2). \end{cases}$$

□

OPGAVE 4 *Bereken*

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{17 + 8\cos\varphi}.$$

OPLOSSING: Definieer $z := e^{i\varphi}$. Dan is $dz = ie^{i\varphi}\, d\varphi$, dus $d\varphi = -iz^{-1}\, dz$. Verder is $\cos\varphi = \frac{1}{2}(z + 1/z)$. Dit geeft

$$I := \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{17 + 8\cos\varphi} = \int_{|z|=1} \frac{1}{17 + 4(z + 1/z)}(-iz^{-1})\, dz = \int_{|z|=1} \frac{-i}{4z^2 + 17z + 4}\, dz$$

De integrand

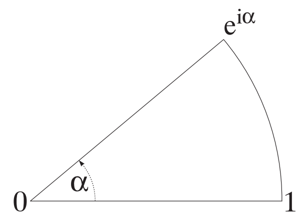
$$f(z) := \frac{-i}{4z^2 + 17z + 4} = \frac{-i}{(4z+1)(z+4)} = \frac{-i/4}{(z + \frac{1}{4})(z+4)}$$

heeft binnen de integratieweg $|z| = 1$ één singulariteit, te weten, een pool in $z = -\frac{1}{4}$. We vinden dus

$$I = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-\frac{1}{4}} f(z) = 2\pi i \cdot \frac{-i/4}{-\frac{1}{4}+4} = \frac{2\pi}{15}.$$

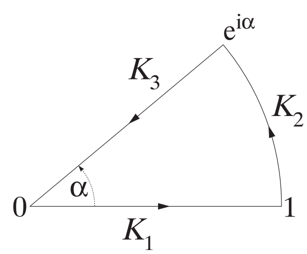
□

OPGAVE 5 *Zij $0 < \alpha < 2\pi$. Bereken $\int_K \bar{z}\,dz$, waar K de Jordankromme is die bestaat uit het rechte lijnstuk van $z = 0$ naar $z = 1$, de cirkelboog om $z = 0$ van $z = 1$ naar $z = e^{i\alpha}$ en het rechte lijnstuk van $z = e^{i\alpha}$ naar $z = 0$ (zie figuur).*



OPLOSSING: We schrijven $K = K_1 + K_2 + K_3$, met de volgende parametervoorstellingen:

$$\begin{array}{ll} K_1 : z = t & (0 \leqslant t \leqslant 1) \\ K_2 : z = e^{i\varphi} & (0 \leqslant \varphi \leqslant \alpha) \\ K_3 : z = e^{i\alpha} t & (1 \geqslant t \geqslant 0) \end{array}$$



Dan hebben we:

1. $\int_{K_1} \bar{z}\,dz = \int_0^1 \bar{t}\,dt = \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}$,
2. $\int_{K_2} \bar{z}\,dz = \int_0^\alpha \overline{e^{i\varphi}} \cdot ie^{i\varphi}\,d\varphi = i\int_0^\alpha d\varphi = i\alpha$,
3. $\int_{K_3} \bar{z}\,dz = \int_1^0 \overline{e^{ia}t} \cdot e^{i\alpha}\,dt = \int_1^0 t\,dt = -\frac{1}{2}$.

Dus

$$\int_K \bar{z}\,dz = \int_{K_1+K_2+K_2} \bar{z}\,dz = i\alpha.$$

NB: We kunnen hier niet de stelling van Cauchy toepassen en constateren dat de integraal gelijk aan nul is, omdat de functie $f(z) := \bar{z}$ niet analytisch is. □