TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Tentamen Functietheorie (2Y480) op 19 januari 2004, 9.00-12.00 uur

De uitwerkingen der opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden.

---

1. Voor welke $p \in \mathbb{C}$ bestaat er een gehele functie f met de volgende eigenschappen

   (a) $|f'(z)| \leqslant |z|$ voor alle $z \in \mathbb{C}$,

   (b) $f(0) = p$,

   (c) $f(1) = 0$.

   Bepaal voor deze waarden van p de functies met de genoemde eigenschappen.

2. Bepaal van de Laurentontwikkeling $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n z^n$ van de functie $f(z) := \tan z$ die convergent is in $z = \pi$ de coëfficiënten c_0 en c_{-1}.

3. Bereken
$$\int_{|z|=2} \frac{\ln(4+z)}{z^2+1}\, dz.$$

4. Bereken de integraal
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\cos(x))^2}{x^2+1}\, dx.$$

5. Schrijf het getal $\left(1 - (-4)^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}+i}$ in de vorm $a + bi$, waar a en b reële getallen zijn.

Normering: Elke opgave 10 punten. Het totaal wordt gedeeld door 5.

TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Uitwerking van het tentamen Functietheorie (2Y480) op 19 januari 2004

VGF: Bij deze uitwerkingen van elke opgave zullen veel gemaakte fouten (VGF) en/of onhandige manipulaties worden vermeld. Hier volgen enkele algemene opmerkingen.

1. Er worden veel rekenfouten gemaakt, waardoor de opgaven ofwel triviaal kunnen worden of onmogelijk op te lossen. Het is van belang elke berekening kritisch te bekijken. Vaak kun je direct aan de oplossing zien dat ze niet correct is, als bijv. een antwoord kennelijk positief moet zijn, terwijl de berekeningen iets complex opleveren. Een voorbeeld hiervan is de integraal in opgave 4.

2. Er worden rekenregels gebruikt die volledig fout zijn, bijv.

   - $\ln(a+b) \overset{\text{☠}}{=} \ln a \cdot \ln b$.
   - $e^{ab} \overset{\text{☠}}{=} e^a + e^b$.
   - $$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}} \overset{\text{☠}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}}{\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z}{2n+1},$$

     een drastische vereenvoudiging, maar volledig fout! De laatste som divergeert overigens voor $z \neq 0$.

   Fouten voor deze soort hebben een groot effect op het cijfer.

3. Er worden ongelijkheden gebruikt voor complexe getallen, vaak omdat de modulusstrepen achterwege worden gelaten.

4. De factor $2\pi i$ wordt vervangen door $1/(2\pi i)$ en omgekeerd.

Opgave 1 *Voor welke $p \in \mathbb{C}$ bestaat er een gehele functie f met de volgende eigenschappen*

1. $|f'(z)| \leqslant |z|$ *voor alle* $z \in \mathbb{C}$,
2. $f(0) = p$,
3. $f(1) = 0$.

Bepaal voor deze waarden van p de functies met de genoemde eigenschappen.

Oplossing: Ook $f'(z)$ is een gehele functie. Omdat $|f'(z)| \leqslant |z|$ voor alle $z \in \mathbb{C}$, volgt uit de gegeneraliseerde stelling van Liouville dat $f'(z)$ een polynoom is van de eerste graad, dus van de gedaante $f'(z) = az + b$. Als we $z = 0$ invullen in **??**. , vinden we dat $f'(0) = 0$, dus dat $b = 0$. Verder volgt uit $|f'(z)| \leqslant |z|$ voor alle z dat $|az| \leqslant |z|$, dus dat $|a| \leqslant 1$. We vinden dus:

$$f'(z) = az \text{ voor een } a \text{ met } |a| \leqslant 1.$$

Hieruit volgt dat $f(z) = \frac{1}{2}az^2 + c$ voor een of andere $c \in \mathbb{C}$. Vullen we **??**. in, dan volgt $\frac{1}{2}a + c = 0$, dus $c = -\frac{1}{2}a$, zodat $f(z) = \frac{1}{2}a(z^2 - 1)$.

Nu vullen we **??**. in. Er volgt $-\frac{1}{2}a = p$, dus $p = -2a$. Omdat $|a| \leqslant 1$, volgt dat $|p| \leqslant \frac{1}{2}$ moet gelden wil er een oplossing bestaan. Deze oplossing luidt dan

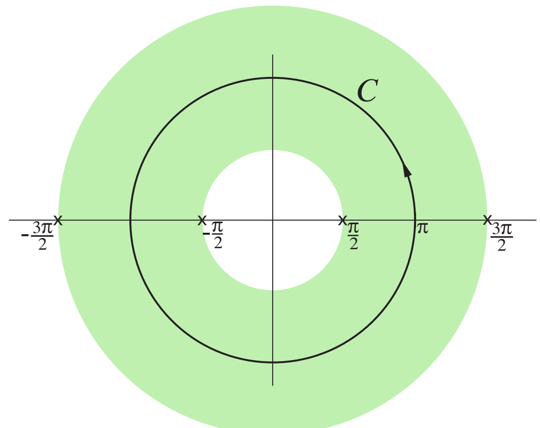
$$f(z) = p(1 - z^2).$$

$\square$

VGF: Er wordt hier zonder argument geponeerd dat $f(z)$ een polynoom is, of een andere speciale gedaante heeft.

Opgave 2 *Bepaal van de Laurentontwikkeling $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n z^n$ van de functie $f(z) := \tan z$ die convergent is in $z = \pi$ de coëfficiënten c_0 en c_{-1}.*

Oplossing: De functie $\tan z$ heeft een pool voor $z = \pm\frac{\pi}{2}$ en $z = \pm\frac{3\pi}{2}$ en verder geen polen met $|z| < 2\pi$. De Laurentreeks rond $z = 0$ van $\tan z$ die convergeert in $z = \pi$, convergeert daarom in de ring $\{z \in \mathbb{C} \,\big|\, \frac{\pi}{2} < |z| < \frac{3\pi}{2}\}$.



De coëfficïenten c_n worden gegeven door

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\sin z}{z^{n+1}\cos z}\,dz,$$

waar C bijvoorbeeld de cirkel met $|z| = \pi$ is. In het bijzonder is

$$c_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\sin z}{z\cos z}\,dz,$$

De singulariteit in $z = 0$ is ophefbaar, zo dat we alleen te maken hebben met de polen in $z = \pm\pi/2$. Dus

$$c_0 = \operatorname*{Res}_{z=\pi/2}\left(\frac{\sin z}{z\cos z}\right) + \operatorname*{Res}_{z=-\pi/2}\left(\frac{\sin z}{z\cos z}\right).$$

Nu is

$$\operatorname*{Res}_{z=\pm\pi/2}\left(\frac{\sin z}{z\cos z}\right) = \operatorname*{Res}_{z=\pm\pi/2}\left(\frac{\sin z/z}{\cos z}\right) = \left(\frac{\sin z/z}{-\sin z}\right)_{z=\pm\pi/2} = \left(-\frac{1}{z}\right)_{z=\pm\pi/2} = \mp\frac{2}{\pi}.$$

Hieruit volgt

$$c_0 = -\frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi} = 0.$$

Op soortgelijke manier gaan we te werk bij c_{-1}:

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \tan z\,dz = \sum_{\pm}\operatorname*{Res}_{z=\pm\pi/2}\left(\frac{\sin z}{\cos z}\right) = \sum_{\pm}\left(\frac{\sin z}{-\sin z}\right)_{z=\pm\pi/2} = \sum_{\pm}(-1) = -2.$$

$\square$

VGF:

1. De machtreeksontwikkelingen van de sinus en de cosinus worden gebruikt. Deze zijn weliswaar overal convergent, maar de ontwikkeling van de cosinus staat in de noemer en kan via de relatie $1/(1-x) = 1 + x + x^2 + \cdots$ tot een ontwikkeling in de teller worden omgewerkt, maar alleen voor $|x| < 1$, in het bijzonder niet voorbij een nulpunt van de noemer.

2. De ontwikkeling rond $z = \pi$ wordt berekend.

Opgave 3 *Bereken*

$$I := \int\limits_{|z|=2} \frac{\ln(4+z)}{z^2+1}\, dz.$$

Oplossing: Er liggen twee polen binnen de cirkel $|z| = 2$, nl. $z = \pm i$. Het vertakkingspunt $z = -4$ en de snede $\{z \in \mathbb{C} \,\big|\, \operatorname{Im}(z+4) = 0, \operatorname{Re}(z+4) < 0\} = \{z \in \mathbb{C} \,\big|\, \operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Re} z < -4\}$ van de logaritme liggen buiten de cirkel. Daarom hebben ze geen invloed op de integraal. We vinden dus

$$I = 2\pi i \sum_{\pm} \operatorname*{Res}_{z=\pm i} \frac{\ln(4+z)}{z^2+1} = 2\pi i \sum_{\pm} \left[\frac{\ln(4+z)}{2z}\right]_{z=\pm i} = 2\pi i \left(\left[\frac{\ln(4+i)}{2i}\right] + \left[\frac{\ln(4-i)}{-2i}\right]\right).$$

Dus $I = \pi(\ln(4+i) - \ln(4-i))$. We rekenen de logaritmen uit. Er geldt

$$\ln(4 \pm i) = \ln|4 \pm i| + i \arg(4 \pm i) = \ln\sqrt{5} \pm i \arctan\frac{1}{4},$$

zodat $I = 2\pi i \arctan\frac{1}{4}$. $\square$

VGF: De logaritmen worden niet (goed) uitgewerkt.

Opgave 4 *Bereken de integraal*

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\cos x)^2}{x^2+1}\, dx.$$

Oplossing: Er geldt $(\cos x)^2 = \frac{1}{4}(e^{2ix} + 2 + e^{-2ix})$ en overeenkomstig $I = \frac{1}{4}(I_1 + 2I_2 + I_3)$. We rekenen de afzonderlijke integralen uit:

$$I_1 := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2ix}}{x^2+1}\, dx.$$

De integrand $f(z) := e^{2iz}/(z^2+1)$ heeft één (enkelvoudige) pool in het bovenhalfvlak, nl. $z = i$. In het bovenhalfvlak buiten de eenheidscirkel geldt

$$|z||f(z)| \leqslant \left|\frac{z}{z^2+1}\right| \leqslant \frac{|z|}{|z|^2-1} \to 0 \quad (|z| \to \infty).$$

We kunnen dus concluderen dat

$$I_1 = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = 2\pi i \left[\frac{e^{2iz}}{2z}\right]_{z=i} = \frac{\pi}{e^2}.$$

Bekend is dat

$$I_2 := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\, dx = \pi,$$

maar deze integraal kan natuurlijk ook op bovenstaande manier worden berekend. Tenslotte is

$$I_3 := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2ix}}{x^2+1}\, dx = \bar{I}_1 = \frac{\pi}{e^2}.$$

Als we deze resultaten combineren, vinden we

$$I = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{1}{e^2}\right).$$

□

VGF:

1. Het residu van de functie $(\cos z)^2/(z^2+1)$ wordt uitgerekend en gebruikt voor de integraal, terwijl voor deze functie de integraal over de boog in het boven/onder-halfvlak niet naar nul convergeert. Een ernstige fout!

2. $(\cos x)^2 \stackrel{\text{☠}}{=} \mathrm{Re}\, e^{2ix}$.

3. De nulpunten van de teller worden berekend. Volledig overbodig en tijdrovend!

Opgave 5 *Schrijf het getal* $\left(1-(-4)^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}+i}$ *in de vorm* $a+bi$*, waar* a *en* b *reële getallen zijn.*

Oplossing: Er geldt

$$(-4)^{\frac{1}{4}} = \exp(\tfrac{1}{4}\ln(-4)) = \exp(\tfrac{1}{4}\ln 4 + \tfrac{1}{4}\pi i) = \sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) = 1+i.$$

Hieruit volgt

$$\begin{aligned}
&\left(1-(-4)^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}+i} = (1-(1+i))^{\frac{1}{2}+i} = (-i)^{\frac{1}{2}+i} = \\
&= \exp\{(\tfrac{1}{2}+i)\ln(-i)\} = \exp\{(\tfrac{1}{2}+i)(-\tfrac{\pi i}{2})\} = \\
&= e^{\pi/2}e^{-\pi i/4} = \frac{e^{\pi/2}(1-i)}{\sqrt{2}} = \frac{e^{\pi/2}}{\sqrt{2}} - \frac{e^{\pi/2}}{\sqrt{2}}i.
\end{aligned}$$

□

VGF: De rekenregels voor de logaritme en de gebroken machten die bekend zijn voor positieve getallen worden zonder meer in het complexe vlak gebruikt. Zo gelden de regels $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ en $(ab)^c = a^c b^c$ alleen onder voorbehoud, zoals in het dictaat beschreven. De uitdrukkingen moeten worden berekend volgens de definities in het dictaat, te weten:

1. $\ln z := \ln|z| + i\arg z$,
2. $z^\alpha := e^{\alpha \ln z}$.