TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Hertentamen Functietheorie (2Y480), woensdag 17 januari 2007, 14:00 – 17:00 uur.

U mag bij het tentamen geen computer (notebook, laptop), boeken of dictaten gebruiken. Voorts mag men geen mobiele telefoon bij zich hebben.

Het tentamen bestaat uit **5** vragen op **1** pagina. Voor de opgaven kunnen de volgende aantallen punten worden behaald:

opg.		pnt.	opg.		pnt.	opg.		pnt.
1	:	5	3	:	8	5	:	5
2	:	6	4	:	6			

De uitwerkingen dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden.

Het cijfer wordt bepaald door het totaal der behaalde punten door 3 te delen, en het resultaat tot op een geheel getal tussen 1 en 10 af te ronden.

---

1. Van een gehele functie $f(z)$ is gegeven dat $\mathrm{Re}[f(z)] = x^2 + \lambda y^2$ voor zekere reële λ. Bepaal λ en bepaal f als functie van z als voorts gegeven is dat $\mathrm{Im}[f(0)] = \lambda$.

2. Voor zekere waarden van $p \in \mathbb{C}$ bestaat er een gehele functie f met de volgende eigenschappen:

   a. $|f'(z)| \leq |z|^2$ voor alle $z \in \mathbb{C}$,

   b. $f(0) = p$,

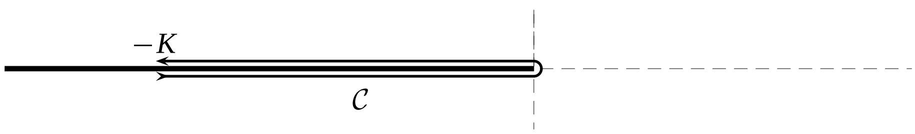
   c. $f(1) = 0$.

   Bepaal voor welke waarden van p functies f met de genoemde eigenschappen bestaan, en bepaal de bijbehorende f expliciet. Geef duidelijk aan welke stelling u gebruikt.

3. De functie $f(z) := z\cos(z)/\sin(z)$ heeft een Laurentreeks $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ die convergent is in $z = \frac{3}{2}\pi$. Bepaal hiervan de coëfficiënten c_0 en c_1.

4. Bepaal de integraal
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\, \mathrm{d}x.$$

5. We definieren de complexe logaritme $\log(z)$ met $\log(1) = 0$ en de vertakkingssnede gelegen langs de negatief reële as $(-\infty, 0]$ (dus op de gebruikelijke wijze). We definieren voor positief reële K de contour $\mathcal{C}$ van $-K - \mathrm{i}.0$ onderlangs de vertakkingssnede, rechtsom de oorsprong, en dan weer bovenlangs de vertakkingssnede terug naar $-K + \mathrm{i}.0$. Zie bijgaande schets.



   Bepaal
$$\int_{\mathcal{C}} \log(z)\, \mathrm{d}z.$$

TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Re-examination Complex Function Theory (2Y480),
Wednesday 17 January 2007, 14:00 – 17:00 uur.

During the exam, you are not allowed to use a computer (notebook, laptop), books or lecture notes. Furthermore, you are not allowed to have a mobile telephone with you.

The exam consists of **5** questions on **1** page. For these questions the following score can be obtained:

qu.		pnt.	qu.		pnt.	qu.		pnt.
1	:	5	3	:	8	5	:	5
2	:	6	4	:	6			

Formulate your answers clearly, logically and completely.

The final mark is obtained by dividing the total amount of points by 3 and rounding the result to an integer number between 1 and 10.

---

1. It is given that for certain real λ the entire function $f(z)$ satisfies $\text{Re}[f(z)] = x^2 + \lambda y^2$. Determine λ and determine f, as a function of z, if also is known that $\text{Im}[f(0)] = \lambda$.

2. For certain values of $p \in \mathbb{C}$ there exists an entire function f with the following properties:

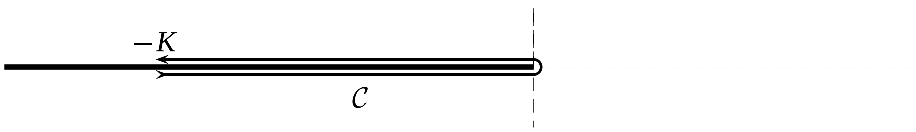
   a. $|f'(z)| \leq |z|^2$ for all $z \in \mathbb{C}$,
   b. $f(0) = p$,
   c. $f(1) = 0$.

   Determine for which values of p functions f exist with the above properties, and determine the corresponding f explicitly. Indicate clearly which theorem is used.

3. The function $f(z) := z\cos(z)/\sin(z)$ has a Laurent series $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ which converges in $z = \frac{3}{2}\pi$. Determine the coefficients c_0 and c_1.

4. Determine the integral
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\, \mathrm{d}x.$$

5. We define the complex logarithm $\log(z)$ with $\log(1) = 0$ and the branch cut along the negative real axis $(-\infty, 0]$ (so, in the usual way). We define for positive real K the contour $\mathcal{C}$ from $-K - \text{i}.0$, underneath the branch cut, right around the origine, and then above the branch cut to return to $-K + \text{i}.0$. See sketch.



   Determine
$$\int_{\mathcal{C}} \log(z)\, \mathrm{d}z.$$

UITWERKINGEN

1. Schrijf $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$, dan is voor gehele f: $u_{xx} + u_{yy} = 2 + 2\lambda = 0$, dus $\lambda = -1$. Met Cauchy-Riemann volgt dat $v_y = u_x = 2x$, dus $v = 2xy + C(x)$. Voorts ook $v_x = 2y + C'(x) = -u_y = -2\lambda y$, dus $C' = 0$, dus $C = C_0$ constant. Omdat $v(0, 0) = C_0 = \lambda = -1$, is dus $f(z) = x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy - \mathrm{i} = z^2 - \mathrm{i}$.

2. Als f geheel is, is ook f' geheel. Omdat $|f'(z)| \leq |z^2|$ voor alle z volgt met de gegeneraliseerde stelling van Liouville dat f' een 2-e graads polynoom is, zegge $f'(z) = Az^2 + Bz + C$. Omdat $|Az^2 + Bz + C| \leq |z^2|$, in het bijzonder voor $z = 0$, volgt dat $C = 0$. Deel links en rechts door z^2. Omdat $|A + B/z| \leq 1$ voor alle $z \neq 0$, is $B = 0$. Dus is $|Az^2| \leq |z^2|$, dus $|A| \leq 1$. Dus is $f(z) = \frac{1}{3}Az^3 + D$. Omdat $f(0) = D = p$ en $f(1) = \frac{1}{3}A + D = 0$ volgt dat $D = p$ en $A = -3p$. Conclusie:
$$|p| \leq \tfrac{1}{3} \quad \text{en} \quad f(z) = -pz^3 + p.$$

3. f heeft aan weerszijden van $|z| = \frac{3}{2}\pi$ singulariteiten in $z = \pm\pi$ en $\pm 2\pi$, dus de Laurentreeks convergeert op het ringgebied $\pi < |z| < 2\pi$. De coefficienten hebben dan de algemene vorm
$$c_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{|z|=\frac{3}{2}\pi} \frac{z\cos z}{z^{n+1}\sin z}\,\mathrm{d}z$$
met kennelijk residubijdragen van $z = 0$, $z = \pi$ en $z = -\pi$. De pool in $z = \pm\pi$ is van de 1e orde, dus
$$\mathrm{Res}_{\pm\pi} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \lim_{z\to\pm\pi} (z \mp \pi)\frac{\cos z}{z^n \sin z} = \frac{(\pm\pi^{-1})^n}{2\pi\mathrm{i}}$$
Omdat
$$\frac{\cos z}{\sin z} = \frac{1 - \frac{1}{2}z^2 + \dots}{z(1 - \frac{1}{6}z^2 + \dots)} = \frac{1}{z}(1 - \frac{1}{2}z^2)(1 + \frac{1}{6}z^2) + \dots = \frac{1}{z} - \frac{1}{3}z + \dots,$$
en dus
$$\frac{\cos z}{z\sin z} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3} + \dots.$$
Als $n = 0$ dan is $\mathrm{Res}_0 = 1/2\pi\mathrm{i}$ en als $n = 1$ dan is $\mathrm{Res}_0 = 0$. Samen volgt dat
$$c_0 = 2\pi\mathrm{i}\big(\mathrm{Res}_0 + \mathrm{Res}_\pi + \mathrm{Res}_{-\pi}\big) = 1 + 1 + 1 = 3$$
$$c_1 = 2\pi\mathrm{i}\big(\mathrm{Res}_0 + \mathrm{Res}_\pi + \mathrm{Res}_{-\pi}\big) = 0 + \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi} = 0$$
Het resultaat $c_1 = 0$ hadden we ook direct kunnen afleiden uit het feit dat f een even functie in z is.

4. De integrand
$$f(z) = \frac{z^2+1}{z^4+1}.$$
is overal analytisch op 4 polen na, t.w. in $z = \pm\, e^{\pm\frac{1}{4}\pi i}$. Omdat $f(z) \sim 1/z^2$ voor $z \to \infty$, zodat $\max_{\theta\in[0,2\pi]} |Rf(R\, e^{i\theta})| \to 0$ voor $R \to \infty$, kunnen we de contour bovenlangs (of onderlangs) sluiten, zodat
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\, dz = 2\pi i \Big(\mathrm{Res}_{e^{\frac{1}{4}\pi i}} + \mathrm{Res}_{-e^{-\frac{1}{4}\pi i}} \Big).$$
De polen zijn enkelvoudig, dus
$$\mathrm{Res}_{e^{\frac{1}{4}\pi i}} = \lim_{z\to e^{\frac{1}{4}\pi i}} (z - e^{\frac{1}{4}\pi i}) \frac{z^2+1}{(z-e^{\frac{1}{4}\pi i})(z+e^{\frac{1}{4}\pi i})(z-e^{-\frac{1}{4}\pi i})(z+e^{-\frac{1}{4}\pi i})} = \frac{\sqrt{2}}{4i}$$
$$\mathrm{Res}_{-e^{-\frac{1}{4}\pi i}} = \lim_{z\to -e^{-\frac{1}{4}\pi i}} (z + e^{-\frac{1}{4}\pi i}) \frac{z^2+1}{(z-e^{\frac{1}{4}\pi i})(z+e^{\frac{1}{4}\pi i})(z-e^{-\frac{1}{4}\pi i})(z+e^{-\frac{1}{4}\pi i})} = \frac{\sqrt{2}}{4i}$$
zodat de integraal gelijk wordt aan $2\pi i \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4i} = \pi\sqrt{2}$

5. **1e manier:** parametriseer de gegeven contour met $z = -t$, waarbij t loopt van K naar 0 en weer terug naar K. Onder de snede is $\log(z) = \log(t) - \pi i$, en boven de snede is $\log(z) = \log(t) + \pi i$, zodat
$$\int_{\mathcal{C}} \log(z)\, dz = -\int_K^0 (\log(t) - \pi i)\, dt - \int_0^K (\log(t) + \pi i)\, dt = -2\pi i K$$
2e manier: deformeer de contour tot de cirkelboog $|z| = K\, e^{i\theta}$, met $-\pi < \theta < \pi$ en $\log(z) = \log(K) + i\theta$. Dan volgt
$$\int_{\mathcal{C}} \log(z)\, dz = \int_{-\pi}^{\pi} (\log(K) + i\theta) K\, e^{i\theta}\, i\, d\theta = K \log(K)\, e^{i\theta} \Big|_{-\pi}^{\pi} - K \int_{-\pi}^{\pi} \theta\, e^{i\theta}\, d\theta = -2\pi i K$$