TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Functietheorie (2Y480)
op 25 november 1998, 9.00-12.00 uur.

Dit tentamen bestaat uit 5 opgaven. De uitwerkingen van deze opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden.

---

1. a) Formuleer de Cauchy-Riemann vergelijkingen.
   b) Van een functie $f(z)$, die overal in $\mathbb{C}$ analytisch is, is gegeven:
      i. $\operatorname{Re} f(z) = 2x - x^3 + axy^2 - 1$, $(z = x + iy, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R})$;
      ii. $f(1) = 0$.

      Bepaal a en $f(z)$, uitgedrukt in z.

2. Gegeven is de functie

$$f(z) = \frac{(1 - \exp(z))\sinh(z)}{z^2(\cosh(z) - 1)} \tag{1}$$

   a. Bepaal de nulpunten van $f(z)$ en hun multipliciteiten.
   b. Bepaal de plaats en de aard van de singulariteiten van $f(z)$.
   c. Bepaal het hoofddeel van de Laurentreeks

$$\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n z^n \tag{2}$$

   van f(z), welke convergeert in een gereduceerde omgeving van $z = 0$.
   d. Bepaal het convergentiegebied van deze Laurentreeks.

3. Bereken voor $a > 0$ de integraal

$$I(a) = \int_0^\infty \frac{\sin^2(x)}{x^2 + a^2} dx. \tag{3}$$

4. Van de functie $f(z)$ is gegeven:

   1) $f(z)$ is analytisch in $\mathbb{C}$, behoudens polen in $z = 0$, $z = 1$ en $z = -1$; de polen in $z = 1$ en $z = -1$ hebben dezelfde orde;
   2) $f(z)$ heeft een tweevoudig nulpunt in $z = i$, een tweevoudig nulpunt in $z = -i$, en geen andere nulpunten;
   3)
   $$\lim_{|z|\to\infty} zf(z) = 1; \tag{4}$$
   4) $\mathrm{Res}_{z=0} f(z)$ is negatief.

   Bepaal $f(z)$; geef precies aan waar u de stelling van Liouville, en de hoofdstelling van de Algebra gebruikt.

5. a. Bewijs dat de functie
   $$f(z) = \frac{\sin(z) - z\cos(z)}{z^3} \tag{5}$$
   geheel is.

   b. Bereken de integraal
   $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x) - x\cos(x)}{x^3} dx \tag{6}$$
   door de integratieweg op een geschikte manier te verleggen.

Voor de vraagstukken kunnen de volgende aantallen punten worden gehaald:

1 a : 2	2 b : 2	3 8	5 a : 2
1 b : 6	2 c : 2	4 8	5 b : 6
2 a : 2	2 d : 2		

Het cijfer wordt bepaald door
het totaal der behaalde punten door 4 te delen.

TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Uitwerking van het tentamen Functietheorie (2Y480) op 25-11-1998, 9.00-12.00 uur

---

Opgave 1

1. *Formuleer de Cauchy-Riemann-vergelijkingen.*
2. *Van een functie $f(z)$, die overal in $\mathbb{C}$ analytisch is, is gegeven:*

   (a) $\operatorname{Re} f(z) = 2x - x^3 + axy^2 - 1 \quad (z = x + iy, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R})$,

   (b) $f(1) = 0$.

   Bepaal a *en* $f(z)$, *uitgedrukt in* z.

Oplossing:

1. Voor een analytische functie $f(z)$ met reëel deel $u(x, y)$ en imaginair deel $v(x, y)$ (waar $z = x + iy$) geldt

$$u_x = v_y,$$
$$u_y = -v_x.$$

2. We geven het reële en imaginaire deel van $f(z)$ aan met resp. $u(x, y)$ en $v(x, y)$. Dan is

$$u = 2x - x^3 + axy^2 - 1,$$
$$u_x = 2 - 3x^2 + ay^2,$$
$$u_y = 2axy.$$

   Uit de vergelijkingen van Cauchy-Riemann volgt $v_x = -u_y = -2axy$. Door integratie krijgen we $v = -ax^2y + \varphi(y)$, waar φ niet van x afhangt. We differentiëren naar y:

$$v_y = -ax^2 + \varphi'(y) = u_x = 2 - 3x^2 + ay^2.$$

   Uit de voorwaarde dat φ onafhankelijk is van x volgt dat $a = 3$. Verder is $\varphi'(y) = 2 + 3y^2$ en dus $\varphi(y) = 2y + y^3 + C$ met een nog nader te bepalen constante C. De voorwaarde $f(1) = 0$ levert $v(1, 0) = C = 0$. We vinden dus

$$v(x, y) = y^3 - 3x^2y + 2y,$$

en dus

$$f(z) = 2x - x^3 + 3xy^2 - 1 + i(y^3 - 3x^2y + 2y).$$

We schrijven dit als een functie van z. Kennelijk is $f(z)$ een derde-graads polynoom in z. Aangezien $z^3 = (x+iy)^3 = x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3 = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)$, volgt gemakkelijk dat

$$f(z) = -z^3 + 2z - 1.$$

□

Opgave 2 *Gegeven is de functie*

$$f(z) := \frac{(1-e^z)\sinh z}{z^2(\cosh z - 1)}.$$

1. *Bepaal de nulpunten van $f(z)$ en hun multipliciteiten.*
2. *Bepaal de plaats en de aard van de singulariteiten van $f(z)$.*
3. *Bepaal het hoofddeel van de Laurentreeks*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

   van $f(z)$ welke convergeert in een gereduceerde omgeving van $z = 0$.

4. *Bepaal het convergentiegebied van deze Laurentreeks.*

Oplossing: We bepalen eerst de nulpunten en hun multipliciteit van de teller en van de noemer. In de *teller* hebben we twee factoren, namelijk $1 - e^z$ en $sinhz$.

- De eerste factor is nul voor $z = 2k\pi i$, waarbij $k \in \mathbb{Z}$. De nulpunten zijn enkelvoudig.
- De tweede factor is gelijk aan $\frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) = \frac{1}{2}e^{-z}(e^{2z} - 1)$. Deze factor is dus nul voor $z = k\pi i$, waarbij $k \in \mathbb{Z}$. Ook deze nulpunten zijn enkelvoudig.

Voor de teller, dus voor het product van de twee factoren, vinden we zo

- Tweevoudige nulpunten in $z = 2k\pi i$,

- Enkelvoudige nulpunten in $z = (2k+1)\pi i$.

De *noemer* bevat de factoren z^2 en $coshz - 1$

- De eerste factor is nul voor $z = 0$. Het nulpunt is tweevoudig.
- De tweede factor is gelijk aan $\frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) - 1 = \frac{1}{2}e^{-z}(e^{2z} + 1 - 2e^z) = \frac{1}{2}e^{-z}(e^z - 1)^2$. Deze factor is dus nul voor $z = 2k\pi i$, waarbij $k \in \mathbb{Z}$. Ook deze nulpunten zijn tweevoudig.

Voor de noemer vinden we zo

- Tweevoudige nulpunten in $z = 2k\pi i$ voor $k \neq 0$,
- Een viervoudig nulpunt in $z = 0$.

Door de nulpunten van teller en noemer en hun multipliciteiten met elkaar te vergelijken vinden we

1. Er zijn enkelvoudige nulpunten in $z = (2k+1)\pi i$ voor $k \in \mathbb{Z}$.
2. Er is één singulier punt en wel in $z = 0$. Dit punt is een pool van de tweede orde. Alle andere nulpunten van de noemer zijn ophefbare singulariteiten.
3. We gebruiken de bekende reeksontwikkelingen voor e^z, $\sinh z$, $\cosh z$. Dan vinden we

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{(1 - (1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \mathcal{O}(z^4)))(z + \frac{1}{6}z^3 + \mathcal{O}(z^5))}{z^2(1 + \frac{1}{2}z^2 + \mathcal{O}(z^4) - 1)} = \\ &= \frac{-z^2(1 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{6}z^2 + \mathcal{O}(z^3))(1 + \frac{1}{6}z^2 + \mathcal{O}(z^4)))}{\frac{1}{2}z^4(1 + \mathcal{O}(z^2))} = \\ &= -\frac{2}{z^2}(1 + \tfrac{1}{2}z + \mathcal{O}(z^2))(1 + \mathcal{O}(z^2)) = \\ &= -\frac{2}{z^2} - \frac{1}{z} + h(z), \end{aligned}$$

   waar $h(z)$ analytisch is in $z = 0$. We zien dat $-\frac{2}{z^2} - \frac{1}{z}$ het gevraagde hoofddeel is. We hebben hier gebruikt dat $(1 + \mathcal{O}(z^2))^{-1} = (1 + \mathcal{O}(z^2))$. Als dus $h(z) = \mathcal{O}(z^2)$, d.w.z., als de machtreeksontwikkeling van $h(z)$ met z^2 begint, dan is immers $1/(1 + h(z)) = 1 - h(z) + (h(z))^2 + \cdots = 1 + \mathcal{O}(z^2)$.
4. Het convergentiegebied van de Laurentreeks is een gereduceerde omgeving van $z = 0$, waarbij de straal ofwel oneindig ofwel zo groot is dat de er binnen de cirkel geen en op de rand wel een singulier punt van $f(z)$ ligt. Aangezien er behalve in $z = 0$ geen singuliere punten zijn is de convergentiestraal ∞.

Opmerking We kunnen de berekeningen drastisch vereenvoudigen door de definities van de hypergeometrische functies sinh z en cosh z te substitueren. Er volgt

$$f(z) = -\frac{(e^z-1)\frac{1}{2}(e^z-e^{-z})}{z^2(\frac{1}{2}(e^z+e^{-z})-1)} = \frac{(e^z-1)(e^{2z}-1)e^{-z}}{z^2(e^{2z}-2e^z+1)e^{-z}} = \\ = \frac{(e^z-1)^2(e^z+1)}{z^2(e^z-1)^2} = \frac{e^z+1}{z^2}.$$

Als we van deze formule voor $f(z)$ uit gaan, krijgen we dezelfde resultaten met veel minder rekenwerk. □

Opgave 3 *Bereken voor $a > 0$ de integraal*

$$I(a) := \int_0^\infty \frac{\sin^2(x)}{x^2+a^2}\,dx.$$

Oplossing: We willen contourintegratie gebruiken maar we kunnen niet rechtstreeks met de analytische functie $\sin^2(z)/(z^2+a^2)$ werken omdat de sinus functie niet in boven- of ondervlak begrensd is. We kunnen de integrand bijv. herschrijven door $\sin z = \frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})$ in te vullen. Eenvoudiger wordt de berekening als we de volgende goniometrische formule gebruiken:

$$\sin^2 x = \tfrac{1}{2}(1-\cos(2x)).$$

We vinden dan dat

$$I(a) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1-\cos(2x)}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{4}\operatorname{Re}\int_{-\infty}^\infty \frac{1-e^{2ix}}{x^2+a^2}\,dx$$

We hebben gebruikt dat de integrand een even functie is.
We nemen de contour die bestaat uit het interval $L_R := [-R, R] \subseteq \mathbb{R}$ en de halve cirkel in het bovenhalfvlak $C_R := \{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z| = R, \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$. Als we dan $R \to \infty$ laten gaan gaat de integraal over C_R naar nul omdat voor $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ geldt $|f(z)| \leqslant 2/(R^2-a^2)$, zodat

$$R \max_{z\in C_R} |f(z)| \leqslant 2R/(R^2-a^2) \to 0 \qquad (R\to\infty).$$

We vinden daarom dat de integraal over de hele contour naar $I(a)$ nadert als $R \to \infty$. Daarom is

$$I(a) = \frac{1}{4}\operatorname{Re}\left(2\pi i \operatorname*{Res}_{z=ia} \frac{1-e^{2iz}}{z^2+a^2}\right) = \frac{1}{4}\operatorname{Re}\left(2\pi i \cdot \frac{1-e^{2iz}}{2z}\right)_{z=ia} = \\ = \frac{1}{4}\operatorname{Re}\left(2\pi i \cdot \frac{1-e^{-2a}}{2ia}\right) = \frac{\pi(1-e^{-2a})}{4a}.$$

Hier hebben we het residu berekend uit de formule

$$\operatorname*{Res}_{z=a} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(a)}{g'(a)}.$$

$\square$

Opgave 4 *Van een functie $f(z)$ is gegeven:*

1. *$f(z)$ is analytisch in $\mathbb{C}$ behoudens polen in $z = 0$, $z = 1$ en $z = -1$. De polen in $z = 1$ en $z = -1$ hebben dezelfde orde.*

2. *$f(z)$ heeft een tweevoudig nulpunt in $z = i$, een tweevoudig nulpunt in $z = -i$, en geen andere nulpunten.*

3. $\lim_{|z|\to\infty} zf(z) = 1$.

4. $\operatorname{Res}_{z=0} f(z)$ *is negatief.*

Bepaal $f(z)$. Geef precies aan waar u de stelling van Liouville, en de hoofdstelling van de Algebra gebruikt.

Oplossing:
Neem aan dat $f(z)$ een pool heeft van de orde p in $z = 0$, en polen van de orde q in $z = 1, -1$. Dan is $g(z) := z^p(z-1)^q(z+1)^q f(z) = z^p(z^2-1)^q f(z)$ overal analytisch, dus een gehele functie. Verder geldt

$$z^{1-p-2q} g(z) = \left(\frac{z^2-1}{z^2}\right)^q \cdot zf(z) \to 1 \quad (|z| \to \infty) \tag{†}$$

Dit betekent dat $|g(z)| \leqslant M|z|^{2q-p-1}$ voor $|z| \geqslant 1$. Volgens de uitgebreide versie van de stelling van Liouville is de functie g daarom een polynoom van de graad $\leqslant 2q+p-1$. Uit vergelijking (†) volgt zelfs dat de graad van $g(z)$ precies gelijk is aan $2q+p-1$. Als immers de graad kleiner zou zijn, was de genoemde limiet gelijk aan nul. De functie $g(z)$ heeft net als $f(z)$ tweevoudige nulpunten in $z = i$, $z = -i$ en nergens anders. Daarom is $g(z)$ dan de vorm $g(z) = (z-i)^2(z+i^2) = C(z^2+1)^2$ voor een of andere constante C. De graad van $g(z)$ is kennelijk gelijk aan 4. We concluderen dat $2q + p - 1 = 4$, dus $2q + p = 5$. Omdat p en q allebei geheel en echt groter dan nul zijn, zijn er slechts twee mogelijkheden: $p = 1, q = 2$ of $p = 3, q = 1$. In het eerste geval krijgen we

$$f(z) = \frac{g(z)}{z(z^2-1)^2} = \frac{C(z^2+1)^2}{z(z^2-1)^2}.$$

In het tweede geval vinden we

$$f(z) = \frac{(Cz^2+1)^2}{z^3(z^2-1)}.$$

Als we $z \to \infty$ laten gaan, vinden we in beide gevallen dat $zf(z) \to C$. We concluderen vanwege het gegeven 3 dat $C = 1$.

Om uit te zoeken welke van deze gevallen zich voordoet, gebruiken we het gegeven 4. Daarom rekenen we in beide gevallen het residu van $f(z)$ uit in $z = 0$. In het geval $p = 1, q = 2$ is de oorsprong een enkelvoudige pool. we kunnen het residu gemakkelijk uitrekenen:

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{(z^2+1)^2}{z(z^2-1)^2} = \left(\frac{(z^2+1)^2}{(z^2-1)^2}\right)_{z=0} = 1$$

Dit is in strijd met 4. We concluderen dat het geval $p = 3, q = 1$ zich moet voordoen. We controleren dit nog door het residu in $z = 0$ uit te rekenen:

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{(z^2+1)^2}{z^3(z^2-1)} &= \operatorname*{Res}_{z=0}\{-z^{-3}(1+2z^2+z^4)(1-z^2+\cdots)\} = \\ &= \operatorname*{Res}_{z=0}(-z^{-3}-z^{-1}+\cdots) = -1.\end{aligned}$$

we vinden dus dat

$$f(z) = \frac{(z^2+1)^2}{z^3(z^2-1)}.$$

de gezochte functie is. □

Opgave 5

1. *Bewijs dat de functie*

$$f(z) := \frac{\sin z - z\cos z}{z^3}$$

geheel is.

2. *Bereken de integraal*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x - x\cos x}{x^3}\,dx$$

door de integratieweg op een geschikte manier te verleggen.

Oplossing:

1. Als quotient van gehele functies is $f(z)$ overal analytisch behalve misschien in het punt $z = 0$ omdat daar de noemer gelijk aan nul wordt. Om na te gaan of dit punt een ophefbare singulariteit is ontwikkelen we de teller in een machtreeks om $z = 0$. We vinden:

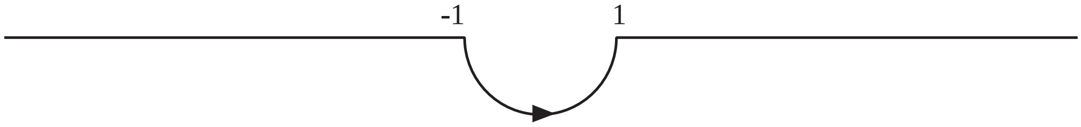
$$\sin z - z\cos z = (z - \tfrac{1}{6}z^3 + \cdots) - z(1 - \tfrac{1}{2}z^2 + \cdots) = \tfrac{1}{3}z^3 + \cdots ,$$

   zodat $f(z)$ ook analytisch is in $z = 0$.

2. We willen de integraal uitrekenen door middel van contourintegratie. Daartoe willen we de integraal bepalen over een contour die een grote boog in het boven- of onderhalfvlak. Om de integrand begrensd te houden schrijven we de goniometrische functie als e-machten:

$$f(z) = \frac{\frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) - \frac{z}{2}(e^{iz} + e^{-iz})}{z^3} = \frac{(-i - z)e^{iz} + (i - z)e^{-iz}}{2z^3}$$

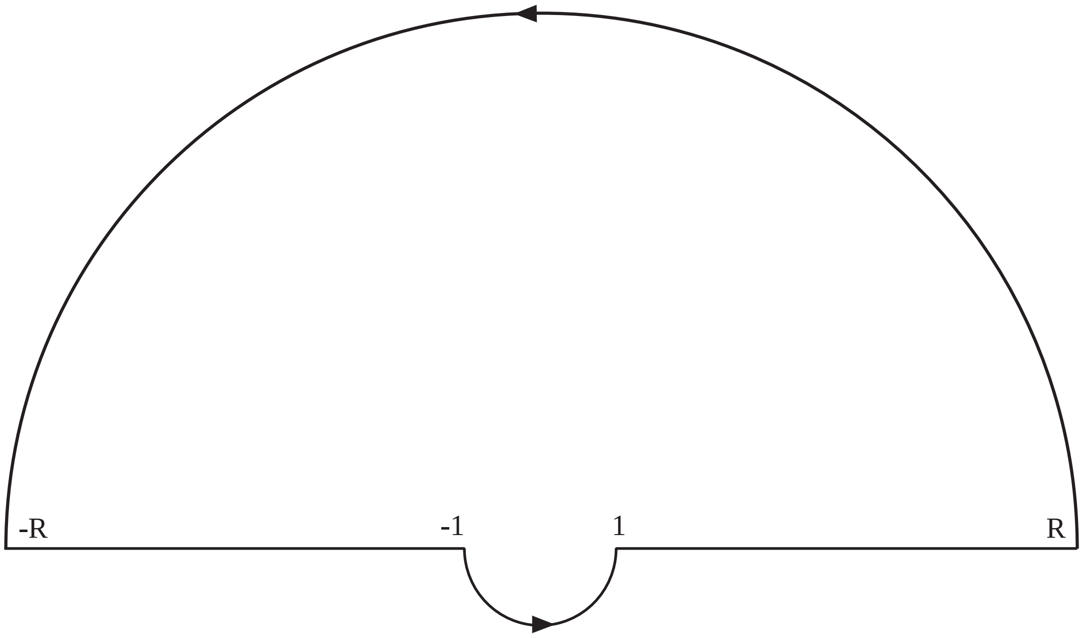
   Voor de termen met e^{iz} hebben we een boog in het bovenhalfvlak nodig, voor de termen met e^{-iz} een boog in het onderhalfvlak. Als we echter de integrand opdeze manier proberen te splitsen, krijgen de afzonderlijke termen een niet-ophefbare singulariteit in de oorsprong. Om dit te voorkomen verleggen we, zoals in de vraagstelling gesuggereerd, eerst de integratieweg. Dit is mogelijk omdat de oorspronkelijke integrand overal analytisch is. We vervangen dus de oorspronkelijke integratieweg over de reële as door de weg C, die over de reële as loopt van $-\infty$ tot -1, een halve cirkel in het onderhalfvlak met middelpunt $z = 0$ en straal 1, en het interval van 1 tot ∞ weer over $\mathbb{R}$.



   De integratieweg loopt nu niet meer over een singulier punt, en we kunnen de integranden splitsen. De eerste integraal is

$$\int_C f_1(z)\,dz,$$

   waar $f_1(z) := (-i - z)e^{iz}/(2z^3)$. Deze integraal sluiten we met een grote halve cirkel met middelpunt $z = 0$ en straal ρ in het bovenhalfvlak.



Omdat $|e^{iz}| \leqslant 1$, vinden we dat het maximum M_ρ van $f_1(z)$ kleiner dan $(1+\rho)/\rho^3$, zodat $\rho M_\rho \to 0$ $(\rho \to \infty)$. We concluderen dat de integraal bepaald wordt door de som van de residuen in de singuliere punten van $|f_1(z)|$ in het door de contour omsloten gebied. Er is precies één zo'n singulier punt, nl $z = 0$. Het residu in dit punt lezen we af uit

$$f_1(z) = \tfrac{1}{2} z^{-3} \{(-i - z)(1 + iz + \tfrac{1}{2}(iz)^2 + \cdots)\} = \frac{-i}{2z^3} - \frac{i}{4z} + \cdots .$$

Blijkbaar is het residu gelijk aan $-\frac{1}{4}i$. De waarde van de integraal is $2\pi i$ maal het residu dus gelijk aan $\frac{1}{2}\pi$.

De tweede integraal

$$\int_C \frac{(-i - z)e^{iz} + (i - z)e^{-iz}}{2z^3}\, dz$$

wordt afgesloten door een halve cirkel in het onderhalfvlak. Omdat hier $|e^{-iz}| \leqslant 1$, vinden we op soortgelijke manier als boven dat de gezochte integraal gelijk is aan de contourintegraal. Deze contourintegraal is echter gelijk aan nul omdat er geen singulier punt binnen de contour ligt. We concluderen dat de gevraagde integraal gelijk is aan $\frac{1}{2}\pi$.

$\square$