TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Tentamen Functietheorie (2Y480) op 21 januari 1999, 14.00-17.00 uur

De uitwerkingen der opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden.

---

1. Beschouw de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-nz^2)}{n}.$$

   (a) Bepaal het gebied van absolute convergentie van deze reeks.

   Geef de som aan met $f(z)$.

   (b) Laat zien dat de reeks uniform convergent is in het gebied $D := \{z \in \mathbb{C} \big| |z-1| < \frac{1}{2}\}$.

   (c) Laat zien dat $f(z)$ analytisch is in D en bepaal daar $f'(z)$.

2. Bereken de integraal

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\vartheta)}{(5 - 4\cos\vartheta)^2}\, d\vartheta.$$

3. Van de functie $f(z)$ is gegeven:

   (a) $f(z)$ is analytisch behoudens een pool van de orde 3 in $z = 0$ en enkelvoudige polen in $z = i$ en $z = -i$.

   (b) $\lim_{z\to\infty} zf(z) = 1$.

   (c) $f(z)$ is oneven, d.w.z. $f(-z) = -f(z)$.

   (d) In de Laurentreeks $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ van $f(z)$ die convergent is voor $|z| > 1$, geldt $c_{-3} = -1, c_{-5} = 2$.

   Bepaal $f(z)$. Geef precies aan waar u de stelling van Liouville gebruikt.

z.o.z.

4. Bereken de integraal

$$\int_{|z|=\pi} \frac{z \cos z}{1 - \sin z}\, dz.$$

5. Bereken de integraal

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix} \cos(2x)}{1 + x^2}\, dx.$$

Normering

1	2	3	4	5
a b c				
4 3 3	10	10	10	10

Het totaal wordt gegdeeld door 5.

TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Uitwerking van het tentamen Functietheorie (2Y480) op 21 januari 1999, 14.00-17.00 uur

---

Opgave 1 *Beschouw de reeks*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-nz^2)}{n}.$$

1. *Bepaal het gebied van absolute convergentie van deze reeks.*

Geef de som aan met $f(z)$.

2. *Laat zien dat de reeks uniform convergent is in het gebied $D := \{z \in \mathbb{C} \big| |z-1| < \frac{1}{2}\}$.*
3. *Laat zien dat $f(z)$ analytisch is in D en bepaal daar $f'(z)$.*

Oplossing:

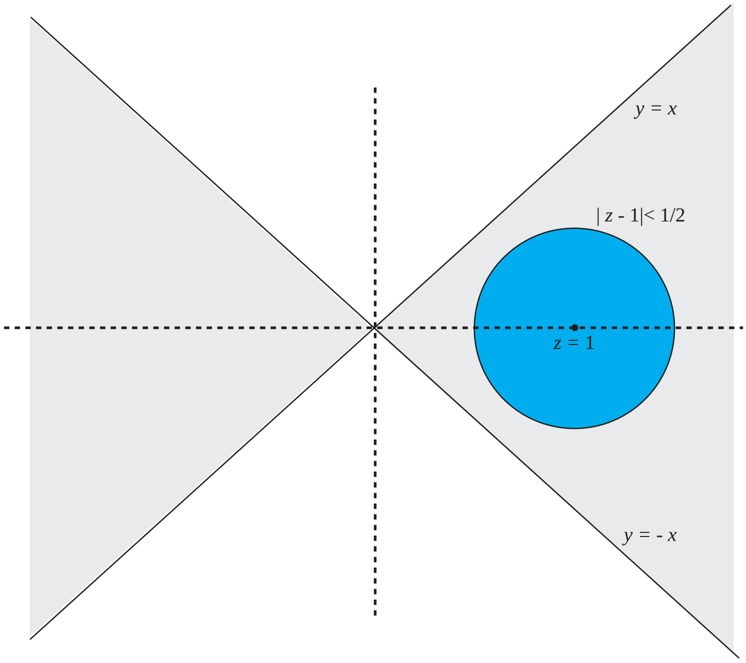
1. Als we $a_n(z) := \exp(-nz^2)/n$ definiëren, volgt uit het convergentiecriterium van d'Alembert dat de reeks absoluut convergent is als $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}(z)|/|a_n(z)| < 1$. We zien dat

$$\frac{|a_{n+1}(z)|}{|a_n(z)|} = \left|\frac{n\exp(-(n+1)z^2)}{(n+1)\exp(-nz^2)}\right| = \left|\frac{n}{n+1}\exp(-z^2)\right|.$$

Als dus

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}(z)|}{|a_n(z)|} = |\exp(-z^2)| < 1,$$

dan is de reeks absoluut convergent. Als we $z = x + iy$ schrijven, is $|\exp(-z^2)| = \exp(-\operatorname{Re} z^2) = \exp(y^2 - x^2)$. De voorwaarde van d'Alembert reduceert dan tot $y^2 < x^2$, dus tot $|y| < |x|$. Het gebied $G := \{z \in \mathbb{C} \big| |\operatorname{Im} z| < |\operatorname{Re} z|\}$ is geschetst in de tekening. Het criterium van d' Alembert is een voorwaarde die wel voldoende maar niet noodzakelijk is. Als dus niet aan deze voorwaarde is voldaan, dan hoeft dit nog niet te betekenen dat de reeks niet absoluut convergent is. We onderzoeken daarom de convergentie in de situatie waar $|\exp(-z^2)| \geqslant 1$. In dat geval is ook $|\exp(-nz^2)| = |\exp(-z^2)|^n \geqslant 1$ en dus $|a_n(z)| \geqslant 1/n$. Omdat $\sum 1/n$ divergeert, kan de reeks $\sum |a_n(z)|$ dus niet convergent zijn. We concluderen dat de gegeven reeks niet absoluut convergent is als $|y| \geqslant |x|$.



2. Het gebied $\bar{D} := \{z \in \mathbb{C} \big| |z-1| \leqslant \frac{1}{2}\}$ ligt binnen het gebied G. Daarom is de functie $\varphi(z) := |\exp(-z^2)|$ daar overal kleiner dan 1. Omdat de verzameling $\bar{D}$ gesloten en begrensd is, neemt $\varphi(z)$ een maximum μ aan op $\bar{D}$. Dit maximum is kleiner dan 1. Hieruit volgt dat $|a_n(z)| \leqslant \mu^n/n$ is op $\bar{D}$, en dus in het bijzonder in D. Omdat $\sum \mu^n/n$ convergeert, volgt uit het criterium van Weierstrass dat de gegeven reeks uniform convergeert op D.

3. Omdat $f(z)$ de som is van een op de verzameling D uniform convergente reeks analytische functies, is ook $f(z)$ analytisch, en differentiatie mag termsgewijs worden uitgevoerd. het resultaat is:

$$f'(z) = \sum_1^\infty \left(\frac{\exp(-nz^2)}{n}\right)' = -2z\sum_1^\infty \exp(-nz^2) = -2z\frac{e^{-z^2}}{1-e^{-z^2}} = \frac{-2z}{e^{z^2}-1}.$$

$\square$

Opgave 2 *Bereken de integraal*

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\vartheta)}{(5-4\cos\vartheta)^2}\, d\vartheta.$$

Oplossing:
We geven de gevraagde integraal met I aan. We substitueren $z = e^{i\vartheta}$. Dan is $dz = ie^{i\vartheta}d\vartheta$, en dus $d\vartheta = -i\,dz/z$. Verder is $\cos\vartheta = \frac{1}{2}(z+1/z)$ en $\cos(2\vartheta) = \frac{1}{2}(z^2+1/z^2)$. Als we dit in de integraal invullen, krijgen we:

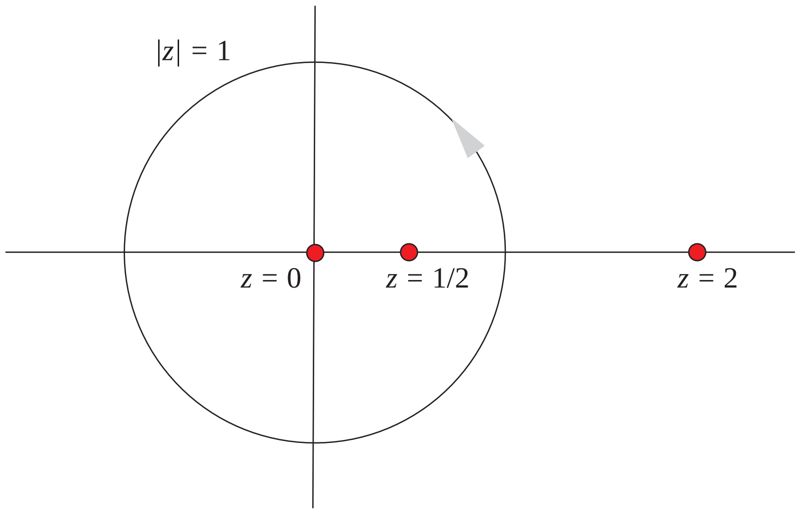
$$I = \tfrac{1}{2i}\int\limits_C \frac{z^4+1}{z(2z^2-5z+2)^2}\,dz,$$

waar $C := \{z \in \mathbb{C} \big| |z| = 1\}$. De integrand

$$f(z) := \frac{z^4+1}{z(2z^2-5z+2)^2}$$

is een analytische functie met uitzondering van de polen. Deze kunnen we berekenen door de noemer te ontbinden. Er geldt:

$$z(2z^2-5z+2)^2 = 4z(z-\tfrac{1}{2})^2(z-2)^2.$$



We vinden dus twee polen binnen de contour C, te weten een enkelvoudige pool in $z = 0$ en een dubbele pool in $z = \frac{1}{2}$. Daarom is

$$I = \frac{2\pi i}{2i}\left(\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=\frac{1}{2}} f(z)\right).$$

Uit de formule

$$f(z) := \frac{z^4+1}{4z(z-\frac{1}{2})^2(z-2)^2}$$

berekenen we:

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \left[\frac{z^4+1}{4(z-\frac{1}{2})^2(z-2)^2}\right]_{z=0} = \tfrac{1}{4},$$

en, als we

$$h(z) := \frac{z^4+1}{4z(z-2)^2}$$

definiëren, geldt $f(z) = h(z)/(z-\frac{1}{2})^2$, en dus

$$\operatorname*{Res}_{z=\frac{1}{2}} f(z) = h'(\tfrac{1}{2}) = \left[\frac{z^5-6z^4-3z+2}{4z^2(z-2)^3}\right]_{z=\frac{1}{2}} = -\frac{5}{108}.$$

Het uiteindelijke resultaat is:

$$I = \pi\left(\frac{1}{4}-\frac{5}{108}\right) = \frac{11\pi}{54}.$$

□

Opgave 3 *Van de functie $f(z)$ is gegeven:*

1. *$f(z)$ is analytisch behoudens een pool van de orde 3 in $z=0$ en enkelvoudige polen in $z=i$ en $z=-i$.*
2. *$\lim_{z\to\infty} zf(z) = 1$.*
3. *$f(z)$ is oneven, d.w.z. $f(-z) = -f(z)$.*
4. *In de Laurentreeks $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ van $f(z)$ die convergent is voor $|z|>1$, geldt $c_{-3} = -1$, $c_{-5} = 2$.*

Bepaal $f(z)$. Geef precies aan waar u de stelling van Liouville gebruikt.

Oplossing: De functie

$$g(z) := z^3(z^2+1)f(z)$$

heeft geen singulariteiten en is dus een gehele functie. Verder volgt uit $zf(z) \to 1$ $(z \to \infty)$ dat

$$\lim_{z\to\infty} z^{-4}g(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{z^2+1}{z^2} \cdot \lim_{z\to\infty} zf(z) = 1 \tag{†}$$

in de eerste plaats uit de (gegeneraliseerde) stelling van Liouville dat $g(z)$ een polynoom is van graad niet groter dan 4, dus dat $g(z)$ van de gedaante

$$g(z) = a_0z^4 + a_1z^3 + a_2z^2 + a_3z + a_4$$

is. In deze notatie is $\lim_{z\to\infty} z^{-4}g(z) = a_0$. Uit (†) volgt dus verder dat $a_0 = 1$. Omdat $f(z)$ en de functie $z^3(z^2+1)$ oneven zijn, zien we dat $g(z)$ even is. Dit houdt in dat $a_1 = a_3 = 0$. We vinden dus dat

$$g(z) = z^4 + a_2z^2 + a_4.$$

De coëfficiënten a_2 en a_4 moeten nog bepaald worden uit de gegevens over de Laurentreeks voor $|z| > 1$. Voor die waarden van z hebben we de ontwikkeling

$$\frac{1}{1+z^2} = z^{-2}(1+z^{-2})^{-1} = z^{-2}(1 - z^{-2} + z^{-4} - \cdots).$$

Hieruit volgt

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{z^4 + a_2z^2 + a_4}{z^3(z^2+1)} &= z^{-5}(z^4 + a_2z^2 + a_4)(1 - z^{-2} + z^{-4} \ldots) = \\ &= z_{-1} + z^{-3}(a_2 - 1) + z^{-5}(a_4 - a_2 + 1) + \cdots . \end{aligned} \tag{1}$$

Uit het gegeven volgt nu dat

$$\begin{aligned} a_2 - 1 &= -1, \\ a_4 - a_2 + 1 &= 2, \end{aligned}$$

dus dat $a_2 = 0$, $a_4 = 1$. Zo vinden we tenslotte:

$$f(z) == \frac{z^4+1}{z^3(z^2+1)}.$$

□

Opgave 4 *Bereken de integraal*

$$\int_{|z|=\pi} \frac{z\cos z}{1-\sin z}\,dz.$$

Oplossing:
We moeten onderzoeken welke singulariteiten de integrand $f(z) := z\cos z/(1-\sin z)$ heeft binnen de contour. Van deze functie heeft de noemer een nulpunt als $\sin z = 1$, dus als $z = \pi(2k+\frac{1}{2})$. Van deze punten ligt alleen het punt $z = \frac{1}{2}\pi$ binnen de cirkel $|z| = \pi$. Omdat $(1-\sin z)' = -\cos z$ gelijk aan nul is in $z = \frac{1}{2}\pi$ en $(1-\sin z)'' = -\sin z$ gelijk aan -1, zien we dat $z = \frac{1}{2}\pi$ een nulpunt van multipliciteit 2 is van de noemer. De teller heeft ook een nulpunt in $z = \frac{1}{2}\pi$. Dit nulpunt is enkelvoudig. Daarom heeft de functie $f(z)$ in $z = \frac{1}{2}\pi$ een enkelvoudige pool. We kunnen het residu vinden uit de formule

$$\operatorname*{Res}_{z=a} \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{2g'(a)}{h''(a)},$$

die geldt als $f(a) = g(a) = g'(a) = 0$ en $g''(a) \neq 0$. In dit geval vinden we

$$\operatorname*{Res}_{z=\pi/2} \left[\frac{(z\cos z)'}{(1-\sin z)''}\right]_{z=\frac{1}{2}\pi} = -\pi$$

De waarde van de integraal is

$$\int_{|z|=\pi} \frac{z\cos z}{1-\sin z}\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=\frac{1}{2}\pi} f(z) = -2\pi^2 i$$

□

Opgave 5 *Bereken de integraal*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}\cos(2x)}{1+x^2}\,dx.$$

Oplossing: De gevraagde integraal is gelijk aan

$$I := \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}(e^{2ix}+e^{-2ix})}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}(F(3)+F(-1)),$$

waar

$$F(a) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{1+x^2}\,dx.$$

Voor positieve a berekenen we $F(a)$ door middel van de contour C_R die bestaat uit het interval $[-R, R]$ op de reële rechte en de halve cirkel in het bovenhalfvlak met middelpunt $z = 0$ en straal R. Over deze contour is de integraal gelijk aan $2\pi i$ maal het residu van $f(z) := e^{iaz}/(1+z^2)$ in de enige singulariteit van $f(z)$ in het bovenhalfvlak, te weten, $z = i$. Als $R \to \infty$, nadert de bijfdrage tot de integraal over de cirkelboog naar nul omdat $R \max_R |f(z)| \to 0$ $(R \to \infty)$. Het resultaat is dat

$$F(a) = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} \frac{e^{iaz}}{1+z^2} = 2\pi i \left[\frac{e^{iaz}}{2z}\right]_{z=i} = \pi e^{-a}.$$

Als $a < 0$, kunnen we op soortgelijke manier de integraal uitrekenen met een contour in het onderhalfvlak. Gemakkelijker is het te gebruiken dat $F(a)$ een even functie is van a. Er geldt immers,

$$\operatorname{Im} F(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ax)}{1+x^2}\,dx = 0,$$

omdat de integrand oneven is. Daarom is

$$F(a) = \operatorname{Re} F(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax)}{1+x^2}\,dx.$$

Hieruit volgt onmiddellijk dat $F(-a) = F(a)$. Zo vinden we

$$I = \tfrac{1}{2}(F(3) + F(1)) = \tfrac{1}{2}\pi(e^{-1} + e^{-3}).$$

$\square$