TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Tentamen Functietheorie (2Y480) op 22 november 1999, 14.00-17.00 uur

Formuleer de uitwerkingen der opgaven duidelijk en schrijf ze overzichtelijk op.

---

1. Zij $v(x, y) := e^x(x \sin y + y \cos y)$ voor $x, y \in \mathbb{R}$. Bepaal een analytische functie $f(z)$ zo dat (met $z = x + iy$) geldt $\operatorname{Im} f(z) = v(x, y)$ en $f(0) = 0$.
2. Gegeven zij de reeks
$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n \qquad (z \in \mathbb{C}, z \neq 0).$$
(a) Bepaal het convergentiegebied. (b) Bepaal de som.
3. Gegeven de functie
$$f(z) := \frac{1}{(\sin z)^2} - \frac{a}{z^2} - \frac{b}{z},$$
bepaal de constanten a en b zo dat $f(z)$ een ophefbare singulariteit heeft in $z = 0$. Wat is in dit geval $f(0)$?
4. Bereken de integraal
$$\int_{|z|=\pi} \frac{z \cos z}{\sin z - 1}\, dz.$$
5. Bereken de integraal
$$\int_C \frac{\sin z}{z^3}\, dz,$$
waarbij de integratieweg C bestaat uit het interval $(\infty, -1]$ op de reële as, de halve eenheidscirkel in het bovenvlak, en het interval $[1, \infty)$.

Normering

1	2	3	4	5
	a b			
10	5 5	10	10	10

Het totaal wordt gedeeld door 5.

TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN

Faculteit Wiskunde en Informatica

Uitwerking van het tentamen Functietheorie (2Y480) op 22 november 1999, 14.00-17.00 uur

---

Opgave 1 *Zij* $v(x, y) := e^x(x \sin y + y \cos y)$ *voor* $x, y \in \mathbb{R}$. *Bepaal een analytische functie* $f(z)$ *zo dat (met* $z = x + iy$*) geldt* $\operatorname{Im} f(z) = v(x, y)$ *en* $f(0) = 0$.

Oplossing: De functies $u(x, y)$ en $v(x, y)$ voldoen aan de vergelijkingen van Cauchy-Riemann:

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

Er geldt

$$v_x = e^x(x \sin y + y \cos y + \sin y),$$
$$v_y = e^x(x \cos y + \cos y - y \sin y).$$

We integreren $u_y = -v_x$ naar y en vinden

$$u(x, y) = e^x(x \cos y - y \sin y) + \varphi(x),$$

waar φ onfahankelijk is van y. We differentiëren u naar x en gebruiken $u_x = v_y$:

$$u_x = e^x(x \cos y - y \sin y + \cos y) + \varphi'(x) = v_y = e^x(x \cos y + \cos y - y \sin y).$$

Hieruit volgt dat $\varphi'(x) = 0$, dus dat $\varphi(x) = C$ constant is. Omdat $f(0) = 0$, geldt $0 = \operatorname{Re} f(0) = u(0, 0) = \varphi(0) = C$. We convluderen

$$u(x, y) = e^x(x \cos y - y \sin y).$$

We drukken nog $f(z)$ in z uit:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = e^x[(x \cos y - y \sin y) + i(x \sin y + y \cos y)] =$$
$$= e^x[(x + iy) \cos y + i(x + iy) \sin y] = (x + iy)e^x(\cos y + i \sin y) = ze^z.$$

□

Opgave 2 *Gegeven zij de reeks*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n \qquad (z \in \mathbb{C}, z \neq -1).$$

(a) Bepaal het convergentiegebied. (b) Bepaal de som.

Oplossing:

(a) We introduceren de variabele $w := \frac{z-1}{z+1}$. De reeks $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)w^n$ is een machtreeks. Volgens bijv. het criterium van d'Alembert is deze reeks convergent voor $|w| < 1$ en divergent voor $|w| > 1$. Voor $|w| = 1$ is de absolute waarde van de algemene term $|(n+1)w^n| \geqslant 1$. De termen gaan dus niet naar nul. Bijgevolg divergeert de reeks. We zien dus dat de reeks convergeert dan en slechts dan als $|w| < 1$. De oorspronkelijke reeks convergeert dan en slechts dan als $|z-1| < |z+1|$. Meetkundig betekent deze voorwaarde: “De afstand van z tot het punt 1 is kleiner dan de afstand tot het punt -1”. Dit is het geval als het punt z in het rechterhalfvlak ligt, dus als $\operatorname{Re} z > 0$. We kunnen dit laatste resultaat ook door berekening vinden door de ongelijkheid $|z-1| < |z+1|$ te kwadrateren en uit te werken in reële en imaginaire deel.

(b) Om de functie $F(w) := \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)w^n$ te bepalen voor $|w| < 1$, definiëren we $G(w) := \sum_{n=0}^{\infty} w^n = (1-w)^{-1}$. Dan vinden we door termsgewijs differentiëren dat $G'(w) = \sum_{n=1}^{\infty} nw^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)w^n = F(w)$. Dus $F(w) = (1-w)^{-2}$. In de variabele z uitgedrukt wordt dit

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n = F\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \left(1-\frac{z-1}{z+1}\right)^{-2} = \tfrac{1}{4}(1+z)^2.$$

□

Opgave 3 *Gegeven de functie*

$$f(z) := \frac{1}{(\sin z)^2} - \frac{a}{z^2} - \frac{b}{z},$$

bepaal de constanten a en b zo dat $f(z)$ een ophefbare singulariteit heeft in $z = 0$.

Wat is in dit geval $f(0)$?

Oplossing: We berekenen de Laurentontwikkeling van $g(z) := 1/(\sin z)^2$ om het punt $z = 0$. We vinden achtereenvolgens

$$\begin{aligned}
\sin z &= z - \tfrac{1}{6}z^3 + \mathcal{O}(z^5) &&= z(1 - \tfrac{1}{6}z^2 + \mathcal{O}(z^4)),\\
(\sin z)^2 &= (z(1 - \tfrac{1}{6}z^2 + \mathcal{O}(z^4)))^2 &&= z^2(1 - \tfrac{1}{3}z^2 + \mathcal{O}(z^4)),\\
\frac{1}{(\sin z)^2} &= z^{-2}(1 + \tfrac{1}{3}z^2 + \mathcal{O}(z^4)) &&= z^{-2} + \tfrac{1}{3} + \mathcal{O}(z^2).
\end{aligned}$$

In de laatste vergelijking hebben we gebruikt dat $(1 - w)^{-1} = (1 + w + w^2 + \cdots)$

Uit deze berekeningen volgt

$$f(z) = \frac{1}{(\sin z)^2} - \frac{a}{z^2} - \frac{b}{z} = \frac{1-a}{z^2} - \frac{b}{z} + \frac{1}{3} + \mathcal{O}(z^2).$$

We zien dat $f(z)$ analytisch in $z = 0$ als $a = 1$ en $b = 0$. In dat geval is $f(0) = \frac{1}{3}$. □

Opgave 4 *Bereken de integraal*

$$\int_{|z|=\pi} \frac{z\cos z}{\sin z - 1}\, dz.$$

Oplossing: We onderzoeken de singuliere punten van de functie

$$f(z) := \frac{z\cos z}{\sin z - 1}.$$

De teller $T(z) := z\cos z$ is nul als $z = 0$ of als $\cos z = 0$. Het laatste doet zich voor als $z = (k + \frac{1}{2})\pi$, voor $k \in \mathbb{Z}$. Alle nulpunten van $T(z)$ zijn enkelvoudig, want in de nulpunten is $T'(z) = \cos z - z\sin z \neq 0$.

De noemer $N(z) := \sin z - 1$ is gelijk aan nul als $\sin z = 1$, dus als $z = z_k := (2k + \frac{1}{2})\pi$ met $k \in \mathbb{Z}$. Deze nulpunten zijn tweevoudig, want $N'(z_k) = \cos z_k = 0$ en $N''(z_k) = -\sin z_k = -1$.

Combinatie van deze resultaten levert dat $f(z)$ een enkelvoudige pool heeft in de punten z_k.

Voor de berekening van de gevraagde integraal hebben we alleen de polen van f binnen de cirkel $|z| = \pi$ nodig. Van de punten z_k is dat alleen $z_0 = \frac{1}{2}\pi$ ($z_1 = \frac{5}{2}\pi$ en $z_{-1} = -\frac{3}{2}\pi$. Allebei zijn ze groter dan π in modulus).

We berekenen het residu van $f(z)$ in $\frac{1}{2}\pi$. Daartoe substitueren we $z = \frac{1}{2}\pi + w$ en we introduceren $h(w) := f(\frac{1}{2}\pi + w)$. Dan vinden we

$$\begin{aligned} h(w) &= \frac{(\frac{1}{2}\pi + w)\cos(\frac{1}{2}\pi + w)}{\sin(\frac{1}{2}\pi + w) - 1} = \frac{(\frac{1}{2}\pi + w)\sin w}{1 - \cos w} = \\ &= \frac{(\frac{1}{2}\pi + w)(w + \mathcal{O}(w^3))}{1 - (1 - \frac{1}{2}w^2 + \mathcal{O}(w^4))} = \frac{(\frac{1}{2}\pi + w)(1 + \mathcal{O}(w^2))}{w(\frac{1}{2} + \mathcal{O}(w^2))}. \end{aligned}$$

dus

$$h(w) = \frac{1}{w} \cdot \frac{\pi + \mathcal{O}(w)}{1 + \mathcal{O}(w^2)} = \frac{\pi}{w} + \text{analytische functie.}$$

Hieruit volgt dat

$$\operatorname*{Res}_{z=\frac{1}{2}\pi} f(z) = \operatorname*{Res}_{w=0} h(w) = \pi.$$

We vinden zo dat de gevraagde integraal gelijk is aan

$$2\pi i \operatorname*{Res}_{z=\frac{1}{2}\pi} f(z) = 2\pi^2 i.$$

□

Opgave 5 *Bereken de integraal*

$$\int_C \frac{\sin z}{z^3}\, dz,$$

waarbij de integratieweg C bestaat uit het interval $(-\infty, -1]$ op de reële as, de halve eenheidscirkel in het bovenvlak, en het interval $[1, \infty)$.

Oplossing: We schrijven $f(z) := (\sin z)/z^3 = (f_1(z) - f_2(z))/(2i)$, waar $f_1(z) := e^{iz}/z^3$ en $f_2(z) := e^{-iz}/z^3$. De gevraagde integraal I kunnen we overeenkomstig splitsen: $I = (I_1 - I_2)/(2i)$. De integraal

$$I_1 := \int_C f_1(z)\, dz$$

berekenen we door de contour met een grote halve cirkel $C_R := \{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Im} z \geqslant 0, |z| = R\}$ af te sluiten in het bovenhalfvlak en het stuk Ω_R van de oorspronkelijke integratieweg te nemene gelegen tussen $-R$ en R op de reële as. Voor $R \to \infty$ gaat de bijdrage over de halve cirkel C_R naar nul, omdat $|f_1(z)| \leqslant 1/R^3$. Anderzijds heeft de functie $f_1(z)$ geen singulariteit binnen de contour. We concluderen dus dat $I_1 = 0$.

De integraal

$$I_2 := \int_C f_2(z)\, dz$$

berekenen we op soortgelijke manier, maar dan met een contour die een halve cirkel in het onderhalfvlak bevat. De bijdrage over die halve cirkel gaat weer naar nul als $R \to \infty$. Nu is er echter een pool binnen de contour, namelijk het punt $z = 0$. We berekenen het residu van $f_2(z)$ in dit punt.

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f_2(z) = \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{e^{-iz}}{z^3} = \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1}{z^3}(1 + (-iz) + \tfrac{1}{2}(-iz)^2 + \cdots) = -\tfrac{1}{2}$$

Met een extra minteken vanwege de integratierichting vinden we nu

$$I_2 = -2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} f_2(z) = \pi i.$$

Tenslotte is $I = -I_2/(2i) = -\pi i/(2i) = -\frac{1}{2}\pi$.

$\square$