TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Tentamen Functietheorie (2Y480) op maandag 17 januari 2005, 14.00-17.00 uur.

De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden.

---

1. Gegeven is de reële functie $u(x, y) = x^2 - 10xy - y^2$.

   a) Ga na dat $u(x, y)$ harmonisch is op R^2.

   b) Bepaal een reële functie $v(x, y)$ zodanig dat $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ (met z = x + iy) holomorf is op $\mathbb{C}$.

   c) Schrijf $f(z)$ expliciet in termen van z.

2. Bereken $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{(1+x^2)^2} dx$ met $a \geq 0$.

3. Bereken $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \frac{\cos(3x)}{5 - 4\cos x}\, dx$.

4. Gegeven is de functie $f(z) = \dfrac{e^z}{z(1-\cos z)}$.

   a) Bepaal de plaats en aard van de singulariteiten van $f(z)$.

   b) Bepaal het hoofddeel van de Laurentreeks van $f(z)$ rond $z = 0$, die convergeert in $z = \pi$.

   c) Bepaal het convergentiegebied van deze Laurentreeks.

5. Bereken $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2ax)e^{-x^2} dx$ $(a > 0)$.

   Hint: integreer de functie e^{-z^2} langs de rand van de rechthoek met hoekpunten $-R$, $+R$, $R + ia$, $-R + ia$ en neem de limiet $R \to \infty$.

   Gegeven is dat $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

---

6. De reële functie $f(t)$ voldoet aan de differentiaalvergelijking

$$f'' + 4f' + 4f = 0 \text{ met beginvoorwaarden } f(0) = 1 \text{ en } f'(0) = 1\ .$$

a) Bepaal de Laplacegetransformeerde $F(s)$ van $f(t)$.

b) Geef de omkeerformule waarmee $f(t)$ uit $F(s)$ berekend kan worden.

c) Bereken de integraal in de omkeerformule en bepaal $f(t)$. Kontroleer of $f(t)$ inderdaad aan de differentiaalvergelijking voldoet.

Puntenwaardering:

Vraagstuk 1a:	2 punten	Vraagstuk 3 :	5 punten	Vraagstuk 5 :	6 punten
1b:	4 punten	Vraagstuk 4a:	2 punten	Vraagstuk 6a:	2 punten
1c:	2 punten	4b:	3 punten	6b:	2 punten
Vraagstuk 2 :	6 punten	4c:	2 punten	6c:	4 punten

Het totaal wordt gedeeld door 4.