

**Tentamen Functietheorie (2Y480) op maandag 23 januari 2006, 14.00-17.00 uur.**

De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden.

---

1. Bepaal een holomorfe functie  $f(z)$  waarvoor geldt ( $z \equiv x + iy$ )

$$\operatorname{Re} f(z) = xy + e^y \sin x .$$

2. Gegeven is de functie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left( \frac{z+3}{z-1} \right)^n, \quad (z \neq 1) .$$

- Bepaal het convergentiegebied van deze reeks.
- Bepaal een expliciete uitdrukking voor  $f(z)$  door de som van de reeks te bepalen (op het convergentiegebied).

3. Bereken

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1}{5 + 3 \cos \varphi} d\varphi .$$

4. Gegeven is dat de functie  $f(z)$  holomorf is op  $\mathbb{C}$  behoudens dat

- $f(z)$  een eerste-orde pool heeft in  $z = 1$ .
- $f(z)$  een tweede-orde pool heeft in  $z = 0$  met residu 0.
- $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = -2$ .
- $f(-1) = 0$ .
- $\int_{|z|=2} z f(z) = 0$ .

Bepaal  $f(z)$ .

5. Laat  $C_R$  een cirkel zijn rond de oorsprong met straal  $R$ . Bereken voor  $R > 1$  de integraal

$$\int_{C_R} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{z}\right)}{(1+z)^2} dz.$$

6. Gegeven is het volgende beginwaardeprobleem voor de functie  $f(x)$ :

$$\begin{cases} f'' + 2f' + f = 0 \\ f(0) = 0 \\ f'(0) = 1 \end{cases}$$

De Laplacegetransformeerde van  $f(x)$  geven we aan met  $\hat{f}(s)$ .

Voor de Laplacegetransformeerden van de eerste afgeleide  $f'(x)$  en de tweede afgeleide  $f''(x)$  geldt:

$$\widehat{f'}(s) = -f(0) + s\hat{f}(s)$$

$$\widehat{f''}(s) = -f'(0) - sf(0) + s^2\hat{f}(s)$$

- Bepaal de Laplacegetransformeerde  $\hat{f}(s)$  van de oplossing  $f(t)$  van het beginwaardeprobleem.
- Geef de omkeerformule van de Laplacegetransformeerde.
- Bereken de oplossing  $f(t)$  door  $\hat{f}(s)$  gevonden onder a) terug te transformeren met de formule onder b).

---

Puntenwaardering:

Vraagstuk 1 :	5 punten	Vraagstuk 3 :	6 punten	Vraagstuk 6a:	3 punten
Vraagstuk 2a:	2 punten	Vraagstuk 4 :	7 punten	6b:	2 punten
2b:	3 punten	Vraagstuk 5 :	7 punten	6c:	5 punten

Het cijfer wordt bepaald door het totaal te delen door 4.