Ralph E. Gomory en geheeltallige lineaire programmering

Het onderzoek van dr. Ralph E. Gomory betreft lineaire en geheeltallige programmering, de theorie van stromen in netwerken, niet-lineaire differentiaalvergelijkingen en computers. Hij doet dit onderzoek met oog voor zowel praktische problemen en modellering als wetenschappelijke, in het bijzonder wiskundige, theorievorming. Hij is wiskundig ingenieur in de ware zin van het woord: wiskundige én ontwerper. Hij is dan ook lid van zowel de National Academy of Sciences als de National Academy of Engineering. Zijn ongetwijfeld meest invloedrijke ontdekking is de naar hem genoemde snedenmethode voor geheeltallige lineaire programmering.

Een beknopte levensloop. Ralph Gomory ontving een PhD in de wiskunde van Princeton University in 1954. Na drie jaar in de Amerikaanse marine was hij twee jaar verbonden aan Princeton University. In 1959 trad hij in dienst bij de onderzoeksafdeling van IBM, werd daar in 1964 IBM Fellow en in 1965 directeur van de Mathematical Sciences Department. Van 1970 tot 1986 was Gomory verantwoordelijk voor de onderzoeksafdeling van IBM, achtereenvolgens als Director of Research, als Vice President en als Senior Vice President. In 1986 werd hij IBM Senior Vice President for Science and Technology. In 1989 verliet hij IBM en werd president van de Alfred P. Sloan Foundation.

Ralph Gomory is lid van de raad van bestuur van verscheidene bedrijven, waaronder The Washington Post Company en de Polaroid Corporation. Hij is in vele hoedanigheden actief geweest in academische, industriële en overheidsorganisaties.

Hij heeft o.a. de volgende prijzen ontvangen: de Lanchester Prize van ORSA in 1963, de John von Neumann Theory Prize van ORSA in 1984, de IEEE Engineering Leadership Recognition Award in 1988, de National Medal of Science, toegekend door de President van de Verenigde Staten in 1988, de Arthur M. Bueche Award van de National Academy of Engineering in 1993, de Heinz Award for Technology, the Economy and Employment in 1998, en de Madison Medal van Princeton University in 1999. Van 1990 tot 1993 was hij lid van de President's Council of Advisors on Science and Technology.

Lineaire en geheeltallige programmering. Het roosteren van personeel, het ontwerpen van een spoorboekje of een electronische chip, het toewijzen van frequenties aan zenders of van vliegtuigen aan terminals: een kleine greep uit de talloze besliskundige vraagstukken die de huidige technologische samenleving dagelijks genereert. Vele hiervan kunnen worden gemodelleerd als zogenaamde lineaire of geheeltallige programmeringsproblemen. *Lineaire programmering* behelst het optimaliseren van een lineaire functie onder lineaire nevenvoorwaarden; wordt de extra eis gesteld dat de variabelen geheeltallig zijn, dan spreken we van *geheeltallige programmering.*

In 1947 ontwikkelde George B. Dantzig zijn *simplexmethode* voor lineaire programmering. Deze zeer effectieve methode wordt nog alom gebruikt. In de afgelopen decennia heeft een combinatie van wiskundige kennis, programmeervakmanschap en vooruitgang van hardware, computerprogramma's opgeleverd die routinematig lineaire programmeringsproblemen oplossen met honderdduizenden variabelen en nevenvoorwaarden.

Met het beschikbaar komen van zo'n succesvolle aanpak voor lineaire programmering groeide al snel het enthousiasme om zo veel mogelijk praktische problemen als zodanig te modelleren. Al snel bleek echter dat het model vaak tekortschiet. Variabelen in lineaire programmeringsproblemen nemen reële waarden aan terwijl de te modelleren waarden vaak intrinsiek geheeltallig zijn. Natuurlijk, als het model adviseert 100,5 auto's te produceren zal

100 of 101—of zelfs 102—ook wel goed zijn. Maar wat te doen als binnen het model een reis van 3,65 schepen over de oceaan optimaal is? Nog pregnanter wordt het dilemma als het gekozen model een variabele x_i bevat die beschrijft of je iets wel ($x_i = 1$) of niet ($x_i = 0$) doet en de optimale oplossing volgens lineaire programmering vervolgens aan x_i de waarde $0,5$ toekent. Dan ben je al met al niet veel opgeschoten. Het is onafwendbaar: de geheeltalligheid moet meegemodelleerd worden. Dit leidt tot geheeltallige (lineaire) programmeringsproblemen, dat wil zeggen vraagstukken van de vorm: maximaliseer de lineaire functie cx waarbij x een vector is met *geheeltallige* coëfficiënten die voldoet aan het stelsel ongelijkheden $a_1x \leq b_1, \ldots, a_mx \leq b_m$.

De kracht van de geheeltallige programmering, een welhaast onbeperkt modelleringspotentieel, is tevens haar zwakte. Geheeltallige programmering is zo algemeen dat tot op heden geen voor alle gevallen efficiënte methode is ontwikkeld. Sterker nog, een algemeen aanvaard vermoeden is dat dat onmogelijk is. Dit in tegenstelling tot lineaire programmering waarvoor, ondanks de gelijkenis, wel efficiënte methoden bestaan. De complexiteit van de geheeltallige programmering, de gelijkenis tussen lineaire en geheeltallige programmering en de beschikbaarheid van goede methoden voor lineaire programmeringsproblemen hebben al vroeg de vraag opgeworpen of en in hoeverre lineaire programmering van dienst kan zijn bij de bestudering van haar moeilijker zusje. Een van de grondleggers van die benadering is Ralph Gomory.

Gomory's snedenmethode voor geheeltallige programmering.[1] [2] [3] Het idee achter deze methode is om eerst de geheeltalligheidseis te negeren en, bijvoorbeeld met de simplexmethode, het corresponderende lineaire programmeringsprobleem op te lossen. Dat levert dan als optimale oplossing een vector $\widehat{x}$ op. Als toevallig alle coëfficënten van $\widehat{x}$ geheeltalig zijn, dan is $\widehat{x}$ ook optimaal voor het geheeltallige programmeringsprobleem en is dat daarmee dus opgelost. Zo niet, wat dan?

Een voor de hand liggende suggestie is om te proberen $\widehat{x}$ af te ronden naar een geheeltallige oplossing. Deze benadering blijkt echter te naïef. Vaak bevindt de optimale geheeltallige oplossing zich niet onder de mogelijke afrondingen en, als dit wel zo is, is de kennis van die afrondingen die voldoen aan de ongelijkheden te beperkt om een efficiënte keuze te maken. Toch zullen we zien dat afronding niet zo'n slecht idee is, maar niet van $\widehat{x}$. We gebruiken afronding voor het vinden van een *snede*.

Een snede is een nieuwe ongelijkheid waar enerzijds alle geheeltallige oplossingen van het oorspronkelijke stelsel aan voldoen, maar anderzijds $\widehat{x}$ niet. Gomory liet zien dat zo'n snede altijd gevonden kan worden, en wel als volgt. Als $\widehat{x}$ een hoekpunt van de oplossingsverzameling van het gegeven stelsel ongelijkheden is—en de simplexmethode garandeert dat—en $\widehat{x}$ heeft niet louter gehele coëfficiënten, dan bestaat er een ongelijkheid $a_{m+1}x \leq b$ die geldt voor alle oplossingen van het stelsel (ook de niet-geheeltallige) zodat $a_{m+1}\widehat{x} = b$ en alle coëfficiënten van a_{m+1} geheel zijn maar b niet. Bovendien liet Gomory zien dat de output van de simplexmethode zo'n ongelijkheid produceert. Rond b naar beneden af naar het gehele getal b_{m+1} en de ongelijkheid $a_{m+1}x \leq b_{m+1}$ is de gewenste snede. *Gomory's snedenmethode* voor geheeltal-

[1]R.E. Gomory, Outline of an algorithm for integer solutions to linear programs, *Bulletin of the American Mathematical Society 64* (1958) 275–278.

[2]R.E. Gomory, Solving linear programming problems in integers, in: *Combinatorial Analysis*, R. Bellman & M. Hall, Jr., eds., Proceedings of Symposia in Applied Mathematics X, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1960, pp. 211–215.

[3]R.E. Gomory, An algorithm for integer solutions to linear programs, in: *Recent Advances in Mathematical Programming*, R.L. Graves & P. Wolfe, eds., McGraw-Hill, New York, 1963, pp. 269–302.

lige programmering voegt nu de gevonden snede aan het stelsel toe en itereert de methode. Gomory bewees dat deze afwisselende sequentie van toepassingen van de simplexmethode en de toevoeging van sneden uiteindelijk leidt tot een stelsel waarvoor de simplexmethode een geheeltallig optimum oplevert.

Nadelen van Gomory's snedenmethode is dat zij veel tijd vergt en een grote rekennauwkeurigheid vereist. De praktische toepasbaarheid van de methode is dan ook zeker niet haar grootste verdienste. Het belang van Gomory's werk ligt vooral in het achterliggende idee: Negeer de geëiste geheeltalligheid en los het resulterende lineaire programmeringsprobleem op; is de oplossing nog niet geheeltallig, snij deze dan van het toegelaten gebied van het lineaire programmeringsprobleem af. Dit laatste gebeurt door toevoeging van sneden—niet noodzakelijk Gomory-sneden. Tot op de dag van vandaag is nagenoeg alle software voor het oplossen van algemene dan wel specifieke geheeltallige programmeringsproblemen gebaseerd op dergelijke snedenmethoden[4]. Het toepassen van Gomory's idee op een specifieke probleemklasse, het ontwikkelen van daarvoor geschikte sneden, enz. is nog steeds een intellectuele uitdaging, die wiskundige kennis en inzicht in de toepassing vereist, echt ingenieurswerk voor wiskundigen.

Naast de algoritmische consequenties heeft Gomory's snedenmethode ook geleid tot meer inzicht in de meetkundige aspecten van geheeltallige oplossingen van stelsels ongelijkheden[5]. Deze inzichten vormen nog steeds een inspiratiebron voor wiskundigen op het gebied van de geheeltallige programmering en de polyedrale combinatoriek (de bestudering van combinatorische problemen met behulp van lineaire algebra).

Verder onderzoek van Gomory. Ander invloedrijk onderzoek van Gomory betreft meervoudige stromen in netwerken[6], hetgeen de klassieke *Gomory-Hu boom* voortbracht, en op kolomgeneratie gebaseerde lineaire programmeringstechnieken[7] [8] [9] voor industriële snijproblemen zoals die voorkomen in de papier- en glasindustrie, die de auteurs de Lanchester Prize van de ORSA opleverde. Mede geïnspireerd door regelmatigheden waargenomen in de oplossingen van deze snijproblemen[10] ontwikkelde Gomory nog een nieuwe benadering van geheeltallige programmering, ook uitgaande van een oplossing van een lineair programmeringsprobleem, namelijk door middel van het oplossen van optimaliseringsproblemen in eindige Abelse

[4] G.L. Nemhauser & L.A. Wolsey, *Integer and Combinatorial Optimization*, Wiley, New York, 1988.

[5] Zie hoofdstuk 23 van: A. Schrijver, *Theory of Linear and Integer Programming*, Wiley, Chichester, 1986.

[6] R.E. Gomory & T.C. Hu, Multi-terminal network flows, *Journal of SIAM 9* (1961) 551–570.

[7] P.C. Gilmore & R.E. Gomory, A linear programming approach to the cutting-stock problem, *Operations Research 9* (1961) 849–859.

[8] P.C. Gilmore & R.E. Gomory, A linear programming approach to the cutting-stock problem–Part II, *Operations Research 11* (1963) 863–888.

[9] P.C. Gilmore & R.E. Gomory, Multistage cutting stock problems of two and more dimensions, *Operations Research 13* (1965) 94–120.

[10] P.C. Gilmore & R.E. Gomory, The theory and computation of knapsack functions, *Operations Research 14* (1966) 1045–1074.

groepen. Dit leidde tot Gomory's *corner polyhedra*[11] [12] [13] [14] [15] [16], naar eigen zeggen nog steeds een van zijn favoriete onderzoeksonderwerpen.

De laatste jaren heeft hij gepubliceerd over de aard van technologie en productontwikkeling, industrieel onderzoek, industriële concurrentiekracht, en over economische modellen voor de internationale handel die rekening houden met *economies of scale*.

A.M.H. Gerards
J.K. Lenstra
4 oktober 1999

[11] R.E. Gomory, On the relations between integer and noninteger solutions to linear programs, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America 53* (1965) 260–265.

[12] R.E. Gomory, Faces of an integer polyhedron, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America 57* (1967) 16–18.

[13] R.E. Gomory, Some polyhedra related to combinatorial problems, *Linear Algebra and its Applications 2* (1969) 451–558.

[14] R.E. Gomory & E.L. Johnson, Some continuous functions related to corner polyhedra, *Mathematical Programming 3* (1972) 23–85.

[15] R.E. Gomory & E.L. Johnson, Some continuous functions related to corner polyhedra II, *Mathematical Programming 3* (1972) 359–389.

[16] R.E. Gomory & E.L. Johnson, The group problem and subadditive functions, in: T.C. Hu & S.M. Robinson, eds., *Mathematical Programming*, Academic Press, New York, 1973, pp.157–184.