TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN

Faculteit Wiskunde en Informatica

TENTAMEN ANALYSE 3 (2 Y 220), DONDERDAG 26 JUNI 2003, 9:00–12:00 UUR.

Inhoud: 5 opgaven over 2 pagina's.
Alle antwoorden dienen voorzien te zijn van een afleiding en een duidelijke en zinvolle argumentatie. Copieën van de eerste en laatste 3 pagina's van "Adams" worden verstrekt. Andere informatiebronnen, waaronder zakrekenmachines, computers en formulekaarten zijn niet toegestaan. Men mag geen mobiele telefoons bij zich hebben.

---

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ wordt gedefinieerd door

$$f(x, y) = xy - x - y.$$

Bepaal plaats, aard en waarde van de extrema van f op de verzameling

$$\mathcal{V} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\right\}.$$

---

2. Beschouw de integraal

$$\iiint_{\mathcal{G}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dx\, dy\, dz,$$

waarin $\mathcal{G}$ het gebied is dat bepaald wordt door de voorwaarden

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \quad z \geq \tfrac{1}{2}.$$

a. Schrijf de integraal in bolcoördinaten.

b. Schrijf de integraal in cilindercoördinaten.

c. Bereken de integraal.

---

3. De kromme $\mathcal{K}$ wordt gegeven door

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y + z = -1, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Deze kromme $\mathcal{K}$ wordt doorlopen met beginpunt $(0, -1, 0)$ en eindpunt $(0, 1, -2)$.
Het vectorveld $\mathbf{F}$ wordt gegeven door

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (-xz + y^2 + 2x\,e^z)\,\mathbf{i} + (-yz + x^2)\,\mathbf{j} + x^2\,e^z\ \mathbf{k}.$$

a) Zij $\widehat{\mathbf{N}}$ de naar buiten gerichte normaal op de cilinder $x^2 + y^2 = 1$. Toon aan dat

$$\mathbf{curl}\,\mathbf{F} \bullet \widehat{\mathbf{N}} = 0.$$

b) Bereken

$$\int_{\mathcal{K}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}.$$

zie volgende pagina

TENTAMEN ANALYSE 3 (2 Y 220), DONDERDAG 26 JUNI 2003, 9:00–12:00 UUR.

---

4. In $\mathbb{R}^3$ is gegeven het vectorveld

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (\sqrt{1 - y^2} - x^2 yz)\,\mathbf{i} + xy^2 z\,\mathbf{j} + (6x^2 + 2z)\,\mathbf{k}.$$

a) Bereken: $\mathbf{div}\,\mathbf{F}$.

b) Het georiënteerde oppervlak $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ wordt bepaald door:
$\mathcal{S}_1$ is het deel van de cilindermantel $x^2 + y^2 = 1$, $0 \le z \le 1$,
$\mathcal{S}_2$ het halve boloppervlak $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$, $1 \le z \le 2$,
terwijl in het punt $(0, 0, 2)$ geldt dat $\widehat{\mathbf{N}} = (0, 0, 1)$. Bereken

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \bullet \widehat{\mathbf{N}}\, dS.$$

---

5. Laat $\mathcal{C}$ een gladde, gesloten en niet zichzelf snijdende kromme zijn. $\mathcal{C}$ ligt in een vlak in $\mathbb{R}^3$. $\widehat{\mathbf{N}} = a\,\mathbf{i} + b\,\mathbf{j} + c\,\mathbf{k}$ is een eenheidsnormaal van het vlak die past bij de omloopzin van $\mathcal{C}$. Bewijs:

$$\frac{1}{2} \int_{\mathcal{C}} (bz - cy)\,dx + (cx - az)\,dy + (ay - bx)\,dz$$

is gelijk aan de oppervlakte van het oppervlak ingesloten door $\mathcal{C}$.

Voor de vraagstukken kunnen de volgende punten worden behaald:

1a : 10	2a : 3	3a : 2	4a : 2	5 : 4
	2b : 3	3b : 6	4b : 6	
	2c : 4			

Het cijfer wordt bepaald door het totaal der behaalde punten door 4 te delen, daarna het eventueel nog uitstaande resultaat van het bij het huiswerk behaalde bonuspunt hierbij op te tellen, en tenslotte het geheel af te ronden op een positief geheel getal kleiner of gelijk aan 10.