TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN

Faculteit Wiskunde en Informatica

HERTENTAMEN ANALYSE 3 (2 Y 220), VRIJDAG 15 AUGUSTUS 2003, 14:00–17:00 UUR.

Inhoud: 5 opgaven over 2 pagina's.
Alle antwoorden dienen voorzien te zijn van een afleiding en een duidelijke en zinvolle argumentatie. Copieën van de eerste en laatste 3 pagina's van "Adams" worden verstrekt. Andere informatiebronnen, waaronder zakrekenmachines, computers en formulekaarten zijn niet toegestaan. Men mag geen mobiele telefoons bij zich hebben.

---

1. We definieren $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ door

$$f(x, y, z) = x^2 - 2x + y^2 + 2y.$$

Bereken met behulp van de methode van Lagrange plaats, aard en waarde van de extrema van f onder de voorwaarde dat

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 \quad \text{en} \quad x + y = 2.$$

---

2. a. Laat $\mathcal{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ 2x \le y \le 1 + x^2\right\}$.
Bereken

$$\iint_{\mathcal{D}} \frac{e^{y-2x}}{1 - \sqrt{y - 2x}}\, dx\, dy$$

met behulp van de transformatie $x = u$, $y = 2u + v^2$, waarbij $v > 0$.

b. Laat $\mathcal{D} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ x^2 + y^2 \ge 1,\ x^2 + y^2 + z^2 \le 4\right\}$.
Bereken

$$\iiint_{\mathcal{D}} z\, dx\, dy\, dz.$$

zie volgende pagina

---

3. In $\mathbb{R}^3$ is gegeven het vectorveld $\mathbf{F} = \sqrt{x^2+y^2}\,\mathbf{i} - \sqrt{x^2+y^2}\,\mathbf{j} + (x^2+y^2+z^2)\,\mathbf{k}$.

   a) Bereken: $\mathbf{curl\,F}$.

   b) Bereken: $\displaystyle\int_{\mathcal{K}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$, met de kromme $\mathcal{K}$ van $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3}, 0)$ naar $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}, 0)$ gegeven door

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 1, \\ z = 0, \\ x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

   c) Bereken: $\displaystyle\int_{\mathcal{K}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$, met de kromme $\mathcal{K}$ van $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3}, 0)$ naar $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ gegeven door

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 1, \\ z = \dfrac{y}{x} + \sqrt{3}, \\ x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

---

4. Laat $a > 0$ en $b > 0$ gegeven zijn. Beschouw het oppervlak

$$\mathcal{S} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + z^2 = 1,\ z \geq 0 \right\}$$

   Op $\mathbb{R}^3$ is gegeven het vectorveld $\mathbf{F} = y^2\,\mathbf{i} + xz^2\,\mathbf{j} + (x^2+y^2)\,\mathbf{k}$. Bereken

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{curl\,F} \bullet \widehat{\mathbf{N}}\, dS,$$

   waarbij $\widehat{\mathbf{N}}$ de eenheidsnormaal op $\mathcal{S}$ is in de richting van de positieve z-as.

---

5. Het gesloten oppervlak $\mathcal{S}$ is de rand van het gebied $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^3$. Op $\mathcal{S}$ is de eenheidsnormaal $\widehat{\mathbf{N}}$ overal naar buiten gericht. Op $\mathcal{R}$ beschouwen we twee vectorvelden $\mathbf{F}$ en $\mathbf{G}$. In ieder punt $\mathbf{x}$ van $\mathcal{S}$ is $\widehat{\mathbf{N}}(\mathbf{x})$ een lineaire combinatie van $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ en $\mathbf{G}(\mathbf{x})$.

   Bewijs:

$$\iiint_{\mathcal{R}} \big(\mathbf{F} \bullet \mathbf{curl\,G}\big)\, dV = \iiint_{\mathcal{R}} \big(\mathbf{curl\,F} \bullet \mathbf{G}\big)\, dV.$$

   Hint: $\mathbf{div}\big(\mathbf{F}\times\mathbf{G}\big) = \big(\mathbf{G} \bullet \mathbf{curl\,F}\big) - \big(\mathbf{F} \bullet \mathbf{curl\,G}\big)$.

Voor de vraagstukken kunnen de volgende punten worden behaald:

1a : 9	2a : 4	3a : 2	4 : 8	5 : 6
	2b : 4	3b : 3		
		3c : 4		

Het cijfer wordt bepaald door het totaal der behaalde punten door 4 te delen, daarna het eventueel nog uitstaande resultaat van het bij het huiswerk behaalde bonuspunt hierbij op te tellen, en tenslotte het geheel af te ronden op een positief geheel getal kleiner of gelijk aan 10.