Uitwerkingen[1]
Tentamen Analyse 3 (2Y220/230), 24 juni 2004.

1. a. Gegeven is $f(x,y) = (x-y)(x-\frac{1}{4}y^2)$ op de kromme $\mathcal{K}$. $\mathcal{K}$ is de driehoek met hoekpunten $(0,0)$, $(0,1)$ en $(1,0)$. $\mathcal{K}$ wordt dus gevormd door het lijnstuk $y=0$, $0 \le x \le 1$, het lijnstuk $x=0$, $0 \le y \le 1$ en het lijnstuk $x+y=1$, $0 \le x \le 1$.
Op het lijnstuk $y=0$, $0 \le x \le 1$ is $f(x,y) = f(x,0) = x^2$ en heeft f een minimum in $(0,0)$ en een maximum in $(1,0)$.
Op het lijnstuk $x=0$, $0 \le y \le 1$ is $f(x,y) = f(0,y) = \frac{1}{4}y^3$ en heeft f een minimum in $(0,0)$ en een maximum in $(0,1)$.
Op het lijnstuk $x+y=1$, $0 \le x \le 1$ is $f(x,y) = f(1-y,y) = g(y) = 1-3y+\frac{7}{4}y^2+\frac{1}{2}y^3$ en geeft $g'(y)=0$ de nulpunten $y=\frac{2}{3}$ en $y=-3$. Alleen $y=\frac{2}{3}$ geeft het punt $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ op het gegeven lijnstuk. Op dit lijnstuk is er een minimum in $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$, een lokaal maximum in $(0,1)$ en een globaal maximum in $(1,0)$.
Voor de hele kromme $\mathcal{K}$ geeft dit:

plaats	waarde	aard
$(1,0)$	$f(1,0)=1$	globaal maximum
$(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$	$f(\frac{1}{3},\frac{2}{3}) = -\frac{2}{27}$	globaal minimum
$(0,0)$	$f(0,0)=0$	lokaal minimum
$(0,1)$	$f(0,1)=\frac{1}{4}$	lokaal maximum

b. Gegeven is $f(x,y) = (x-y)(x-\frac{1}{4}y^2)$ op het gebied T. T is het gesloten begrensde gebied dat $\mathcal{K}$ als rand heeft.
De kandidaatextremen op de rand van T hebben we gevonden bij (a.). Dit zijn de punten $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ en $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$. Onderzocht moet worden of er ook nog kandidaatextremen zijn in het inwendige van T.
Dus $\text{grad}(f)(x,y) = (2x-\frac{1}{4}y^2-y, -\frac{1}{2}-x+\frac{3}{4}y^2) = (0,0)$. De eerste vgl. geeft $x = \frac{1}{8}y^2+\frac{1}{4}y$. Substitutie in de tweede vgl. geeft

$$-\frac{1}{16}y^3+\frac{3}{8}y^2-\frac{1}{2}y = 0\ .$$

Dus

$$y = o \text{ of } y^2-6y+8=0\ .$$

$y=0$ geeft kandidaatextreem $(0,0)$. De vgl $y^2-6y+8=0$ heeft geen nulpunten voor $0 \le y \le 1$.
Voor het bepalen van de aard van de kandidaatextremen moeten we nu niet alleen het gedrag op de rand bekijken maar het gedrag op heel T. $f(x,y)=0$ langs de lijn $y=x$ en langs de parabool $x=\frac{1}{4}y^2$. Deze gaan beiden door $(0,0)$. In iedere omgeving van $(0,0)$ vinden we dus punten in T met $f(x,y)<0$ en $f(x,y)>0$. Dus $(0,0)$ is een zadelpunt en geen extreme waarde op T. Op een gesloten begrensd gebied heeft een continue functie een globaal maximum en een globaal minimum. In $(1,0)$ is het globale maximum, in $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ het globale minimum. Door deze zelfde stelling toe te passen op het gebied binnen T maar boven de parabool $x=\frac{1}{4}y^2$ volgt dat in $(0,1)$ een lokaal maximum is.

[1] Deze uitwerkingen worden verstrekt als extra service. Aan deze uitwerkingen kunnen geen rechten worden ontleend.

2. Het gebied is eenvoudig te beschrijven met cilindercoördinaten.
   $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le r \le b$ en $0 \le z \le \sqrt{a^2 - r^2}$.
   Dus de te berekenen integraal wordt

$$\int_0^{2\pi} \int_0^b \int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} zr\ dzdrd\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^b \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - r^2}\ \ r\ drd\theta = \cdots = \frac{1}{2}\pi b^2(a^2 - \frac{1}{2}b^2)\ .$$

3. Berekening geeft div$\mathbf{F} = 1$. Beschouw de halve bol B begrensd door S en het grondvlak G gegeven door $z = 0$, $x^2 + y^2 \le 1$ Toepassen van de stelling van Gauss geeft

$$\iiint\limits_B \text{div}\mathbf{F} dV = \iint\limits_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\ dS + \iint\limits_G \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\ dS\ .$$

   Nu is $\iiint\limits_B \text{div}\mathbf{F}dV$ =volume halve bol= $\frac{2}{3}\pi$.
   En

$$\iint\limits_G \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\ dS = \iint\limits_G -x^2 r\ drd\theta = -\int_0^1 \int_0^{2\pi} r^3\cos^2\theta\ drd\theta = \cdots = -\frac{1}{4}\pi\ .$$

   Dus

$$\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\ dS = \frac{11}{12}\pi\ .$$

4. a.

$$\text{div}\mathbf{F} = \frac{x(y-z)}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3} + \frac{y(z-x)}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3} + \frac{z(x-y)}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3} = 0$$

   b. Adams, theorem 5, blz. 956.
   Er is in dit geval niet aan de voorwaarden voldaan. Het inwendige van een bol om de oorsprong ligt niet geheel in $I\!R^3 \setminus \{\underline{0}\}$.

   c. Zoek $\mathbf{G}$ zodat $\mathbf{F} = \text{rot}\mathbf{G}$. Dus

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z} &= \frac{(y-z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\ ,\\
\frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x} &= \frac{(z-x)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\ ,\\
\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} &= \frac{(x-y)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\ .
\end{aligned}$$

   Met $G_3 = 0$ volgt (gebruik formuleblad)

$$\begin{aligned}
G_2 &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} - y\ln|z + \sqrt{x^2+y^2+z^2}|\ ,\\
G_1 &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} + x\ln|z + \sqrt{x^2+y^2+z^2}|\ .
\end{aligned}$$

   De vectorpotentiaal is nu $G_1\mathbf{i} + G_2\mathbf{j}$ (niet gedefinieerd op de negatieve $z - as$). Een ander mogelijk vectorpotentiaal is

$$\mathbf{G} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathbf{i} + \sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathbf{j} + \sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathbf{k}$$

d. Toepassen van de stelling van Stokes geeft

$$\oint_C \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \mathrm{rot}\mathbf{G} \cdot \hat{\mathbf{N}} \; dS = \iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \; dS \; .$$

Kiezen we voor S een oppervlak op de bol begrensd door C dan is $\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} = 0$.

5. $\mathrm{div}(f\nabla g) = \nabla f \cdot \nabla g + f\nabla^2 g$ (zie formuleblad), $\nabla^2 g = 0$ want g is harmonisch, dus $\mathrm{div}(f\nabla g) = \nabla f \cdot \nabla g$. Met de stelling van Gauss volgt

$$\oiint_S (f\nabla g) \cdot \hat{\mathbf{N}} \;\; dS = \iiint_R \mathrm{div}(f\nabla g) \;\; dV = \iiint_R \nabla f \cdot \nabla g \;\; dV \; .$$