TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Deeltentamen Bewijzen met Computerondersteuning (2R844) op maandag 12 mei 2003, 14.00 – 16.00 uur.
NB: Dit is een 'open-boek-tentamen', u mag dus schriftelijk materiaal naar keuze als informatie gebruiken.
De uitwerkingen van de opgaven moeten duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven worden.

---

1. Deze vraag gaat over de ongetypeerde λ-calculus.

   We definiëren de λ-termen *zero*, *one*, *two* en *plus* door:

   $zero := \lambda xy \,.\, x$,

   $one := \lambda xy \,.\, xy$,

   $two := \lambda xy \,.\, x(xy)$,

   $plus := \lambda mnuv \,.\, mu(nuv)$.

(5) (a) Laat zien dat $plus\ one\ one =_\beta two$.

(5) (b) Bewijs dat *niet* geldt: $plus\ one\ one =_\beta plus\ zero\ zero$.

(10) 2. Deze vraag gaat over $\lambda\!\rightarrow$–Church.

   Vind een bewoner van het type $\sigma \to ((\sigma \to \tau) \to \varphi)$ in de context $\Gamma \equiv x : \sigma \to (\tau \to (\sigma \to \varphi))$ en geef de bijbehorende afleiding (dit mag in vlaggennotatie, maar geef dan wél aan waar de *axiom*-regel gebruikt wordt).

Zie bladzijde 2.

Deeltentamen Bewijzen met Computerondersteuning (2R844) op maandag 12 mei 2003, 14.00 – 16.00 uur.

---

(10) 3. Deze vraag gaat over $\lambda 2$.

Laat zien dat de volgende term typeerbaar is in context $\Gamma \equiv$ nat $: *$.

$$(\lambda\alpha : * \,.\, \lambda\beta : * \,.\, \lambda f : \alpha \to \alpha \,.\, \lambda g : \alpha \to \beta \,.\, \lambda x : \alpha \,.\, g(f(fx)))\ \text{nat} \quad .$$

Geef daartoe een afleiding waarmee het type van deze term wordt berekend. Vermeld ook welke afleidingsregels u gebruikt.

Noot: U mag de verkorte vlaggennotatie gebruiken, dus u mag:

(1) de context aangeven met vlaggen,

(2) toepassingen van de *axiom*-regel (ook wel genoemd: *start-rule*) overslaan.

(10) 4. Deze vraag gaat over λC.

Geef een afleiding in vlaggennotatie die als bewijs kan dienen van de logische uitspraak $\forall_{x \in S}(P(x)) \Rightarrow \forall_{y \in S}(P(y) \vee Q(y))$.

NB: Gebruik de tweede-orde definitie van $\vee$.

Noot: (1) U mag *start* en *weakening* waar nodig combineren.

(2) U mag de (s_1, s_2)-rule (ook wel genoemd: form-regel) negeren, dat wil zeggen: u mag aannemen dat elk Π-type dat u tegenkomt al in orde is.

De getallen tussen haakjes vóór elk onderdeel geven aan hoeveel punten u met dat onderdeel kunt behalen. Het eindcijfer wordt bepaald door het totaal der behaalde punten door 4 te delen en af te ronden.