

Bijzondere getallen

Oneindig (als getal)

Tom Verhoeff

Technische Universiteit Eindhoven
Faculteit Wiskunde en Informatica

T.Verhoeff@TUE.NL
<http://www.win.tue.nl/~wstomv/>

Bijzondere getallen

Er zijn **DRIE** soorten wiskundigen:

- zij die kunnen tellen en
- zij die dat *niet* kunnen

Ik zal proberen in eindige tijd wat te vertellen over oneindig

Getallen

Belang van getallen: wetenschap, economie, maatschappij

Niet-wiskundige boeken over getallen:
geschiedenis, filosofie, antropologie, psychologie, mystiek

Natuurkunde: (on)eindigheid van ruimte en tijd

Oneindig in de **informatica**:
data(structuren), eindiging van 'reken'processen

't Wordt een heel verhaal, u moet wel eens wat voor lief nemen

Top tien van getallen (Clifford Pickover, 2001)

1.	0		
2.	π	3.141592653...	Archimedes, Ludolph
3.	e	2.718281828...	Napier, Euler
4.	i	$\sqrt{-1}$	Gauss
5.	$\sqrt{2}$	1.414213562...	Pythagoras
6.	1		
7.	2		
8.	γ	0.5772156649...	Euler, Mascheroni
9.	Ω	<i>onberekenbaar</i>	Chaitin
10.	\aleph_0	<i>oneindig</i>	Cantor

Top tien van getallen (Clifford Pickover, 2001)

Alle getallen hebben wel wat, moeilijk te kiezen

Over 0, π , e , i zijn hele boeken geschreven (populair)

Niet over 1, 2 of $\sqrt{2}$ (voorzover ik weet)

Ook nog interessant:

$$\phi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) = 1.6180339887... \quad \text{Gulden Snede, Fibonacci}$$

$$\log 2 = 0.69314718... \quad \text{Mercator}$$

Getallen verzameld

- \mathbb{N} – Natuurlijke getallen: 0, 1, 2, ...
- \mathbb{Z} – Gehele getallen: ..., -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...
- \mathbb{Q} – Rationele getallen: ..., $-7\frac{2}{3}$, ..., $\frac{1}{2}$, ..., $\frac{355}{113}$, ...
- \mathbb{R} – Reële getallen: ..., γ , ..., $\sqrt{2}$, ..., e , ..., π , ..., Ω , ...
- \mathbb{C} – Complexe getallen: ..., i , ..., $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$, ...
- Keten van uitbreidingen: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

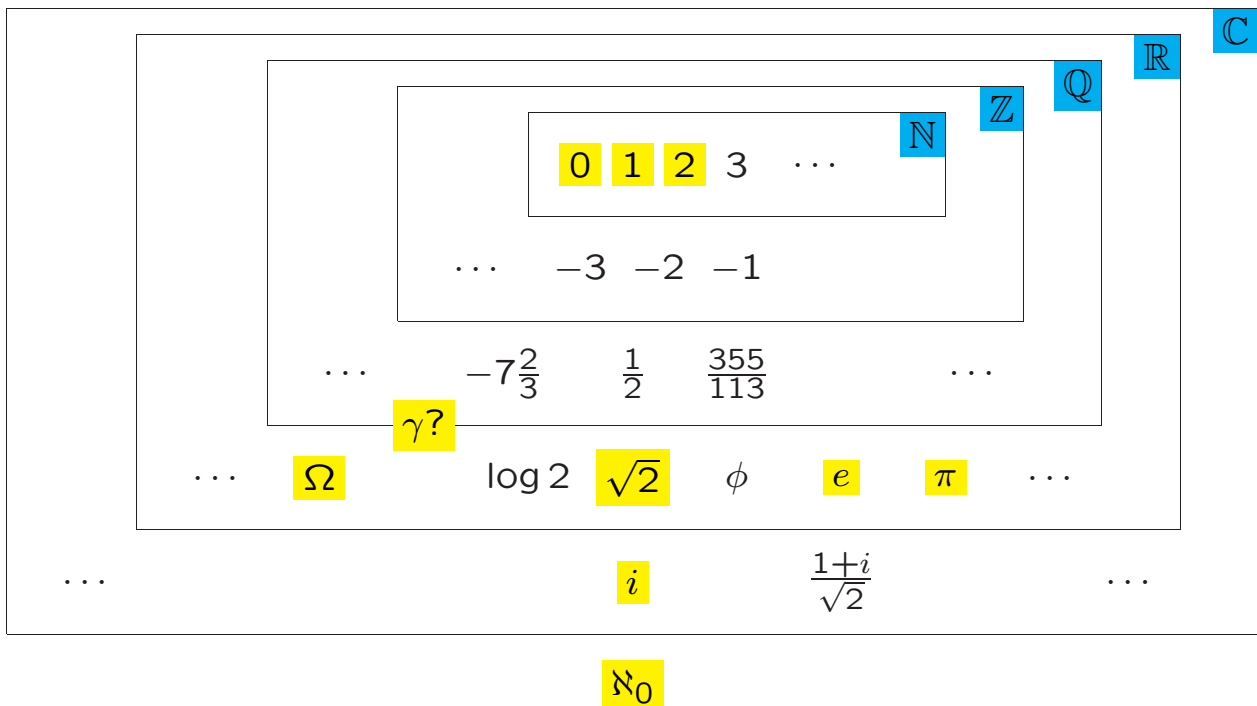
Getallen verzameld

Classificatie

Vergelijk met biologische taxonomie

Soms onenigheid over $0 \in \mathbb{N}$

Geneste verzamelingen van getallen



© 2002, T. Verhoeff

Oneindig-5

Geneste verzamelingen van getallen

Volgende verzameling omvat vorige

Allemaal **oneindig** grote verzamelingen (...)

Clifford's Top Tien bevat geen getallen uit $\mathbb{Z} - \mathbb{N}$, $\mathbb{Q} - \mathbb{Z}$

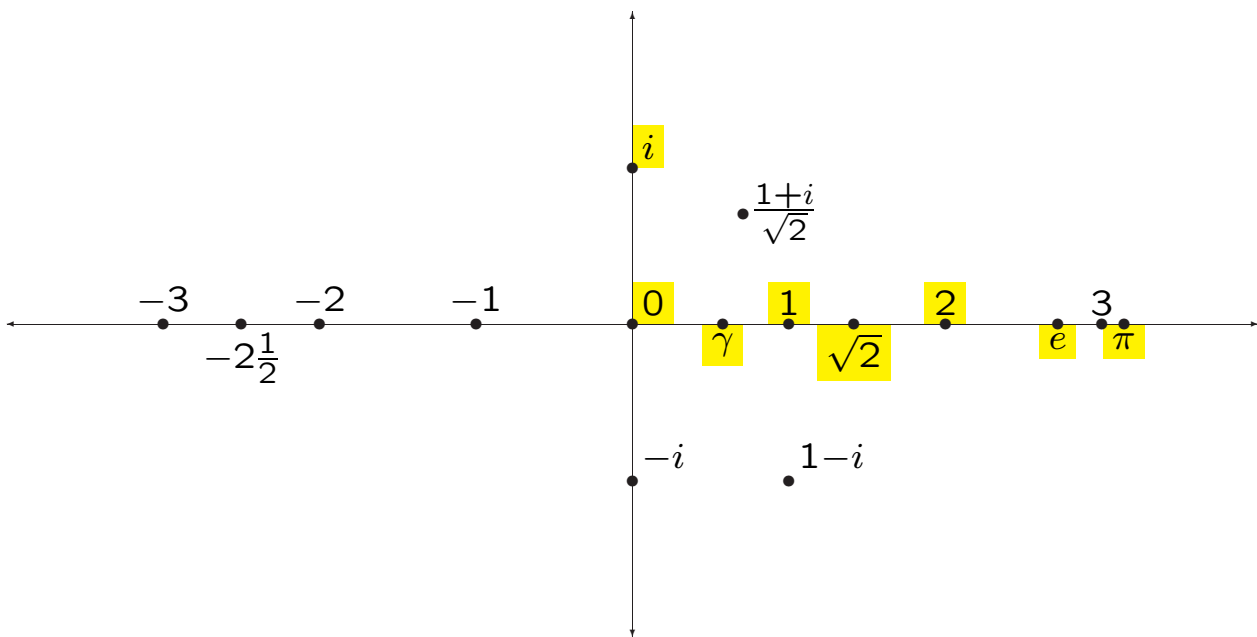
$\gamma \in \mathbb{Q}$ onbekend, vermoed wordt $\gamma \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

$\aleph_0 \notin \mathbb{C}$

© 2002, T. Verhoeff

Oneindig-5

Getallen als meetkundige punten: topologische structuur



Getallen als meetkundige punten: topologische structuur

Topologische structuur: nabijheid

Meetkundige lijn (\mathbb{R}) en vlak (\mathbb{C}):

- oneindig uitgestrekt
- oneindig dichtgepakt (dichter dan \mathbb{Q})

Bewerkingen op getallen: algebraïsche structuur

\mathbb{N} : $a+b$ (optellen), $a*b$ (vermenigvuldigen), a^b (machtsverheffen)

\mathbb{Z} : $a-b$ (aftrekken: $a = x+b$)

\mathbb{Q} : a/b (delen: $a = x * b$)

\mathbb{R} : $\sqrt[b]{a}$ (worteltrekken: $a = x^b$),

$\log_b a$ (logaritme: $a = b^x$)

\mathbb{C} : nulpunten van polynomen, bijv. $x^2 + 1 = 0$

Bewerkingen op getallen: algebraïsche structuur

Eenheidselement, nulelement, inverse, associatief, distributief

Ordering

Uitbreiding met doel bewerkingen **gesloten** te maken
ofwel bepaalde (algebraïsche) vergelijkingen oplosbaar te maken
 \mathbb{Z} (schulden, debet); \mathbb{Q} (taart delen)

Machtsverheffen in \mathbb{Z} en \mathbb{Q} : $b \in \mathbb{N}$

Machtsverheffen in \mathbb{R} : $b \in \mathbb{N} \vee a > 0 \vee (-b \in \mathbb{N} \wedge a \neq 0)$

Delen in \mathbb{Q} , \mathbb{R} en \mathbb{C} : $b \neq 0$

Worteltrekken in \mathbb{R} : $a > 0$

Logaritme in \mathbb{R} : $a > 0$ en $b > 0$

Logaritme in \mathbb{C} : $a \neq 0$ en $b \neq 0$ en $|b| \neq 1$

Potentieel oneindige processen (...)

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$$

$$\frac{2}{\pi} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdot \dots$$

$$e = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$

Potentieel oneindige processen (...)

Reële getallen als limiet van (potentieel) oneindige processen

Het oneindige dat nooit **actueel** 'echt' bestaat, bereikt wordt

Bijv. bij $\sqrt{2}$: kwadraat van **kettingbreuk** steeds dichterbij 2

$$\phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

Oneindig bij limiet van rij ($n \rightarrow \infty$)

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \rightarrow 0$$

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$$

NIET: $\frac{1}{\infty}$

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1, \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2, \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3, \dots \rightarrow e$$

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

NIET: $\left(1 + \frac{1}{\infty}\right)^\infty$

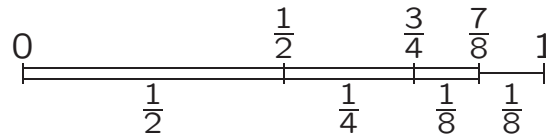
Oneindig bij limiet van rij ($n \rightarrow \infty$)

Dit leidt tot een topologisch oneindig

Je kan er willekeurig dichtbij komen

Oneindig bij limiet van reeks ($\sum_{k=1}^{\infty}$)

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n}$$



$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

$$\infty = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

Oneindig bij limiet van reeks ($\sum_{k=1}^{\infty}$)

Paradox van **Zeno**

Ook nog interessant (*harmonische reeks*):

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} H_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} H_n - \log n$$

en

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$$

Oneindige getallen

- Topologisch: limiet $\rightarrow \infty$
- Algebraïsch: **bestaat niet** ($\infty - 1 = ?$ ofwel $? + 1 = \infty$)
- Maat voor grootte van verzamelingen: **kardinaalgetallen** als \aleph_0
- ‘Maat’ voor ordeningen: **ordinaalgetallen** als ω en ϵ_0

Oneindige getallen

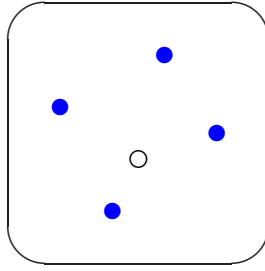
Algebraïsch oneindig bestaat niet (in volle glorie): $\infty - 1 = x$

- x niet eindig, want eindig plus 1 is eindig
- x niet ∞ , want dan $1 = 0$

Kardinaalgetallen vaak in populaire literatuur, daarom niet nu doen
Aftelbaar, overaftelbaar, diagonaalargument, machtsverheffen, (G)CH

Ordinaalgetallen: ruggengraat van de **moderne verzamelingsleer**
Informatica: onderzoek naar **eindiging** van rekenprocessen
datastructuren (samenpakking van informatie)

Knikerspel 1



Pak telkens een knikker:

- Verwijder 'm

Eindigt dit? Na hoeveel zetten?

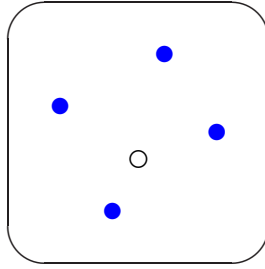
Knikerspel 1

Gegeven een zak met een **eindig aantal knikers**.

Zolang de zak niet leeg is, halen we er telkens één uit.

Dit eindigt na K stappen, als er initieel K knikers zijn.

Knikerspel 2



Pak telkens een knikker:

- Als blauw, dan verwijderen
- Als wit, dan vervangen door één blauwe

Knikerspel 2

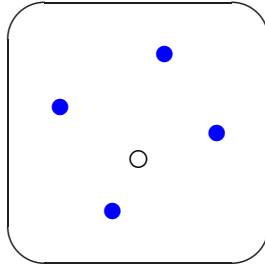
Je hebt nu ook een **onbeperkte** voorraad (blauwe) knikers

Het aantal neemt niet altijd af

Als je ook een blauwe door een witte zou vervangen, dan **niet eindig**

Wat als je twee blauwen teruglegt voor een witte?

Knikerspel 3



Pak telkens een knikker:

- Als blauw, dan verwijderen
- Als wit, dan vervangen door **willekeurig eindig aantal blauwen**

Knikerspel 3

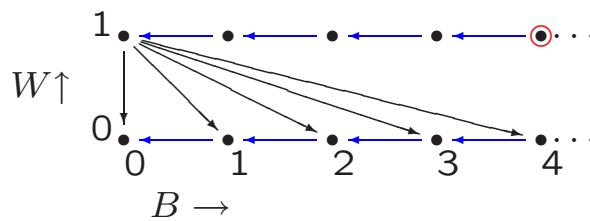
Als dat **willekeurig** u niet zint,

lees dan 'in N -de stap door N blauwen'

Knikerspel analyse

W witte knikers B blauwe knikers

1. Eindigt na $W + B$ stappen
2. Eindigt na $2 * W + B$ stappen
3. Eindigt na ten hoogste $\omega * W + B$ stappen



© 2002, T. Verhoeff

Oneindig-15

Knikerspel analyse

Wat als **twee** blauwen terugleggen? $3 * W + B$ stappen
En N blauwen terugleggen (vaste N)? $(N+1) * W + B$ stappen

En nu N terugleggen **in N -de stap**?

Geen enkele **eindige** weegfactor is zwaar genoeg

$N < \omega$ voor elke eindige N : $\omega * (W - 1) + B + N < \omega * W + B$

Is elke **dalende** rij toch eindig? Zijn er goede rekenregels met ω ?

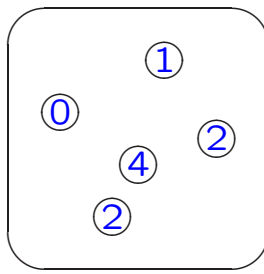
Vergelijk met **lexicografische ordening** op paren

Ook met **rode** knikers (\rightarrow wit): $\omega^2 * R + \omega * W + B$

© 2002, T. Verhoeff

Oneindig-15

Lottobalspel



Pak telkens een \mathbb{N} -genummerde lottobal:

- Vervang door **willekeurig aantal met kleinere waarden**

d.w.z. (n) vervangen door $(<n)$ $(<n)$... $(<n)$

Lottobalspel

Verder generaliseren: **onbeperkt** aantal (genummerde) kleuren

Als dat **willekeurig** u niet zint,

lees dan 'in N -de stap door N kleinere waarden'

Eindigt dit altijd, en waarom?

Wat gebeurt er met (0) ? Komt niets voor terug!

Nu op naar het **ultieme spel**: Stelling van Goodstein

Bewerkingen op natuurlijke getallen

Opvolger (1 erbij): $a|$

Optellen (herhaald 1 erbij): $a + b = a \overbrace{|\dots|}^{b \times}$

Vermenigvuldigen (herhaald optellen): $a * b = \overbrace{a + \dots + a}^{b \times}$

$$a * 0 = 0 \quad a * 1 = a \quad a * b| = a * b + a \quad a * (b + c) = a * b + a * c$$

Machtsverheffen (herhaald vermenigvuldigen): $a^b = \overbrace{a * \dots * a}^{b \times}$

$$a^0 = 1 \quad a^1 = a \quad a^{b|} = a^b * a \quad a^{b+c} = a^b * a^c$$

Bewerkingen op natuurlijke getallen

Om Stelling van Goodstein te formuleren moet je wat rekenen

Notatie $a|$ is niet standaard, **turfje erbij**

Bemerk de gelijkvormige eigenschappen voor $*$ en \uparrow

Maar: optellen en vermenigvuldigen zijn **commutatief**

$$a + b = b + a \quad a * b = b * a$$

En machtsverheffen *niet*: $2^3 = 8 \neq 9 = 3^2$

Daarom ook twee inversen (linker en rechter: $\sqrt[b]{a}$ en $\log_b a$)

Decimale notatie

Ieder natuurlijk getal is op *unieke* wijze te schrijven als

som van machten van 10 met coëfficiënten < 10 .

Voorbeeld:

$$\begin{aligned} 266 &= 200 + 60 + 6 \\ &= 2 * 100 + 6 * 10 + 6 * 1 \\ &= 2 * 10^2 + 6 * 10^1 + 6 * 10^0 \end{aligned}$$

Decimale notatie

Coëfficiënten c_i (kunnen 0 zijn; reden voor introductie 0)

Exponenten i (in positiesysteem gecodeerd door positie)

$$N = \sum_{i=0}^k c_i * 10^i$$

Vergelijk: rijtje waarden < 10

Notatie in grondtal $G \geq 2$

Ieder natuurlijk getal is op *unieke* wijze te schrijven als

som van machten van G met coëfficiënten $< G$.

Voorbeeld met $G = 2$ (*binair*):

$$\begin{aligned} 266 &= 256 + 8 + 2 \\ &= 2^8 + 2^3 + 2^1 \end{aligned}$$

Voorbeeld met $G = 3$ (*ternair*):

$$\begin{aligned} 266 &= 243 + 18 + 3 + 2 \\ &= 3^5 + 2 * 3^2 + 3^1 + 2 * 3^0 \end{aligned}$$

Notatie in grondtal $G \geq 2$

Binair: coëfficiënten 0 of 1

Ternair: coëfficiënten 0, 1 of 2

Coëfficiënt 0: term weglaten ($0 * a = 0$)

Coëfficiënt 1: coëfficiënt weglaten ($1 * a = a$)

Exponent 0: macht weglaten ($c * a^0 = c * 1 = c$)

Exponent 1: weglaten ($a^1 = a$)

Super- G -notatie met grondtal $G \geq 2$

1. Noteer in grondtal G .
2. Herhaal met de *exponenten*.
3. Stop zodra alle getallen $\leq G$.

Voorbeeld met $G = 2$:

$$\begin{aligned} 266 &= 2^8 + 2^3 + 2 \\ &= 2^{2^3} + 2^{2+1} + 2 \\ &= 2^{2^{2+1}} + 2^{2+1} + 2 \end{aligned}$$

Super- G -notatie met grondtal $G \geq 2$

Herhalen: elementair principe (kinderspelen, moppen)

Herhaald machtsverheffen groeit heel hard

Bij $G = 10$ gebeurt er pas wat vanaf **100 miljard**:

$$100\,000\,000\,000 = 10^{10+1}$$

Daaronder hetzelfde als notatie in grondtal 10

Goodstein-rij van $N > 0$ en $G \geq 2$

$$N = 8 \quad G = 2$$

1. Schrijf N in **super- G -notatie**.

$$8 = 2^{2+1}$$

2. Vervang hierin elke G door $G + 1$.

$$3^{3+1} = 81$$

3. Verlaag nieuwe N met 1.

$$N' = 80$$

4. Verhoog G met 1.

$$G' = 3$$

5. Stop als $N = 0$, anders vanaf stap 1 herhalen.

Goodstein-rij van $N > 0$ en $G \geq 2$

Dadelijk nog een groter voorbeeld

Vraag (nog) niet hoe Goodstein hier op kwam of waar het toe dient

Goodstein-rij bij $N = 266$ en $G = 2$

Volgnr.	N	G
1	266 $2^{2^{2+1}} + 2^{2+1} + 2$ $3^{3^{3+1}} + 3^{3+1} + 3 - 1$	2
2	443...886 (39 cijfers) $3^{3^{3+1}} + 3^{3+1} + 2$ $4^{4^{4+1}} + 4^{4+1} + 2 - 1$	3
3	323...681 (617 cijfers) $4^{4^{4+1}} + 4^{4+1} + 1$ $5^{5^{5+1}} + 5^{5+1} + 1 - 1$	4
4	... (> 10 000 cijfers) $5^{5^{5+1}} + 5^{5+1}$	5

© 2002, T. Verhoeff

Oneindig-22

Goodstein-rij bij $N = 266$ en $G = 2$

Gaat natuurlijk verder na 4e waarde, maar rijst de pan uit

De getallen doen duidelijk hun best oneindig groot te worden :-)

Tussenresultaat voor N hoef je niet uit te rekenen, want je kan meteen van notatie in grondtal G naar $G + 1$ (geel → geel)

$$G^E - 1 = \underbrace{H * G^{E-1} + \dots + H * G + H}_{E \times} \quad \text{met } H = G - 1$$

$$10^E - 1 = \underbrace{9 \dots 9}_{E \times} \quad \text{voor } E \geq 1$$

Spelversie: Hercules en de Hydra (draak met vertakkende nekken)

© 2002, T. Verhoeff

Oneindig-22

Stelling van Goodstein (1944)

Elke Goodstein-rij eindigt met $N = 0$.

't Kan even duren:

- $N = 3, G = 2$ eindigt na 5 stappen
- $N = 4, G = 2$ eindigt na $3 * 2^{402653211} - 3 \approx 10^{10^8}$ stappen

Stelling van Goodstein (1944)

Die -1 doet 't 'm, die hamert maar door ...

Aantal stappen groeit supersuperexponentieel met N

Lijkt op Ackermann-functie

Contrast met onbewezen vermoedens over tammere rekenprocessen:

Tel getal bij op zijn omkering tot palindroom

$152 \rightarrow 152 + 251 = 403 \rightarrow 403 + 304 = 707$ $196 \rightarrow ?$

Als N even $\rightarrow N/2$, als N oneven $\rightarrow 3N + 1$ (Collatz)

$3 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow \dots$

Bewijsbaarheid van Stelling van Goodstein

Stelling van Kirby en Paris (1982):

De Stelling van Goodstein volgt *niet* uit de Peano Axioma's.

'Gewone' inductie is niet toereikend, Goodstein rij 'groeit te snel'.

Elk bewijs van de Stelling van Goodstein vergt (een vorm van) *transfinitie* inductie zoals met *ordinaalgetallen*.

Bewijsbaarheid van Stelling van Goodstein

Peano Axioma's (PA):

1. $0 \in \mathbb{N}$
2. $a \in \mathbb{N} \Rightarrow a| \in \mathbb{N}$
3. $\forall a \in \mathbb{N} : a| \neq 0$
4. $a| = b| \Rightarrow a = b$
5. $0 \in S \wedge (\forall a \in \mathbb{N} : a \in S \Rightarrow a| \in S) \Rightarrow \mathbb{N} \subseteq S$

Axioma 5: **Inductie** (basis, stap),
vergelijk met omvallende **rij dominostenen** (begin, doortikken)

Onvolledigheidsstelling van Gödel over PA (1930):

Er bestaan ware uitspraken, die onbewijsbaar zijn in PA

Maar nu met 'echte' rekenkundige stelling die onbewijsbaar is in PA

Ordinaalgetallen t/m ω

Ordinaalgetal is verzameling van al zijn **voorgangers**:

$$0 = \{ \}$$

$$1 = \{ 0 \}$$

$$2 = \{ 0, 1 \}$$

$$3 = \{ 0, 1, 2 \}$$

\vdots

$$N = \{ 0, 1, 2, \dots, N-1 \}$$

\vdots

$$\omega = \{ 0, 1, 2, \dots \}$$

ω is kleinste **oneindige** ordinaalgetal: $N < \omega$ voor alle $N \in \mathbb{N}$

Ordinaalgetallen t/m ω

Ruggengraat van de moderne verzamelingsleer

Rekenen met ordinaalgetallen

Opvolger (1 erbij): $\alpha| = \alpha \cup \{\alpha\}$

Limiet: $\bigcup_{\alpha \in A} \alpha$ ♠ $\times 1$, ♠ $\times 2$, ..., ♠ $\times \omega$

Optellen (herhaald 1 erbij)

Vermenigvuldigen (herhaald optellen)

Machtsverheffen (herhaald vermenigvuldigen)

Rekenen met ordinaalgetallen

Net als bij natuurlijke getallen, maar nu limiet erbij

$$2| = \{0, 1\}| = \{0, 1, 2\} = 3$$

Ook ω keer iets herhalen: $\omega * \omega = \overbrace{\omega + \dots}^{\omega \times}$

Pas op met rekenen: niet alle regels gelden meer

$$2 * \omega = \overbrace{2 + \dots}^{\omega \times} = \overbrace{1 + 1 + \dots}^{\omega \times} = \overbrace{1 + \dots}^{\omega \times} = 1 * \omega = \omega$$

$$\omega * 2 = \omega + \omega = \overbrace{1 + \dots}^{\omega \times} + \overbrace{1 + \dots}^{\omega \times} \neq \omega$$

Meer oneindige ordinaalgetallen

$$\begin{aligned}
 & \omega, \quad \omega + 1, \quad \omega + 2, \quad \dots, \quad \omega + \omega = \omega * 2 \\
 & \omega * 2 + 1, \quad \omega * 2 + 2, \quad \dots, \quad \omega * 2 + \omega = \omega * 3 \\
 & \dots, \quad \omega * 4, \quad \dots, \quad \omega * 5, \quad \dots, \quad \omega * \omega = \omega^2 \\
 & \omega^2 + 1, \quad \dots, \quad \omega^2 + \omega, \quad \dots, \quad \omega^2 + \omega^2 = \omega^2 * 2 \\
 & \dots, \quad \omega^2 * 3, \quad \dots, \quad \omega^2 * 4, \quad \dots, \quad \omega^2 * \omega = \omega^3 \\
 & \dots, \quad \omega^4, \quad \dots, \quad \omega^5, \quad \dots, \quad \omega^\omega
 \end{aligned}$$

Meer oneindige ordinaalgetallen

Tot ω^2 : $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, 1e kwadrant van 2-dimensionale rooster

$$\begin{array}{cccc}
 \vdots & & & \\
 \omega * 3 & \dots & & \\
 \omega * 2 & \omega * 2 + 1 & \dots & \\
 \omega & \omega + 1 & \omega + 2 & \dots \\
 0 & 1 & 2 & \dots
 \end{array}$$

Tot ω^N in N-dimensionale rooster

Alternatief: \mathbb{N} samenpersen op stukje van $\mathbb{Q}[0, 1)$: $n \rightarrow 1 - \frac{1}{2^n}$

Dan $[\omega, \omega * 2) \rightarrow \mathbb{Q}[1, 1\frac{1}{2})$

I.h.a. $\omega * n \rightarrow 2 - \frac{1}{2^n}$, dan $\omega^2 \rightarrow 2$

Normaalvorm voor ordinaalgetallen $< \omega^\omega$

Normaalvorm van $\alpha < \omega^\omega$:

$$\alpha = \omega^k * c_k + \omega^{k-1} * c_{k-1} + \dots + \omega^2 * c_2 + \omega * c_1 + c_0$$

waarbij k en alle c_i eindig zijn.

Vergelijk met **decimale notatie**:

$$N = 10^k * c_k + 10^{k-1} * c_{k-1} + \dots + 10^2 * c_2 + 10 * c_1 + c_0$$

waarbij $0 \leq c_i < 10$, maar nu **onbegrensde coëfficiënten**.

Zelfde structuur als een **lijst** natuurlijke getallen: $[c_k, c_{k-1}, \dots, c_1, c_0]$.

Normaalvorm voor ordinaalgetallen $< \omega^\omega$

Ingewikkelder dan 1-dimensionale structuur van \mathbb{N}

Lijsten: typische datastructuur in informatica bij rekenprocessen

Oplossing voor **lottobalspel**: $c_i =$ aantal ballen met waarde i

Lexicografische ordening op lijsten over \mathbb{N}

Inbedden in $(\mathbb{Q}, <)$: $k + 0.\overbrace{1\dots 1}^{c_k}0\overbrace{1\dots 1}^{c_{k-1}}0\dots\dots 0\overbrace{1\dots 1}^{c_0}000\dots$
 $c_k \neq 0$

Op naar epsilon nul

$$\begin{aligned}
 &0, \quad 1, \quad \dots, \quad \omega, \quad \dots, \quad \omega * 2, \quad \dots, \quad \omega^2, \quad \dots, \quad \omega^\omega \\
 &\quad \omega^\omega + 1, \quad \dots, \quad \omega^\omega * 2 \quad \dots, \quad \omega^\omega * \omega = \omega^{\omega+1} \\
 &\quad \quad \dots, \quad \omega^{\omega*2}, \quad \dots, \quad \omega^{\omega^2}, \quad \dots, \quad \omega^{\omega^\omega} \\
 &\quad \quad \quad \dots, \quad \omega^{\omega^{\omega^\omega}}, \quad \dots, \quad \underbrace{\omega^{\omega^{\omega^{\omega^{\dots}}}}}_{\omega \times} = \epsilon_0
 \end{aligned}$$

ϵ_0 is kleinste oplossing van

$$\alpha = \omega^\alpha$$

Op naar epsilon nul

Dit is al lastiger te tekenen

In te bedden in \mathbb{R}

Andere kleinste oplossingen:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= 1 + \alpha && (\omega) \\
 \alpha &= \omega + \alpha && (\omega * \omega = \omega^2) \\
 \alpha &= 2 * \alpha && (\omega) \\
 \alpha &= \omega * \alpha && (\omega^\omega) \\
 \alpha &= 2^\alpha && (\omega)
 \end{aligned}$$

Normaalvorm voor ordinaalgetallen $< \epsilon_0$

Normaalvorm van $\alpha < \epsilon_0$:

$$\alpha = \omega^{\beta_k} * c_k + \omega^{\beta_{k-1}} * c_{k-1} + \dots + \omega^{\beta_0} * c_0$$

waarbij k en alle c_i eindig zijn en $c_i \neq 0$, en

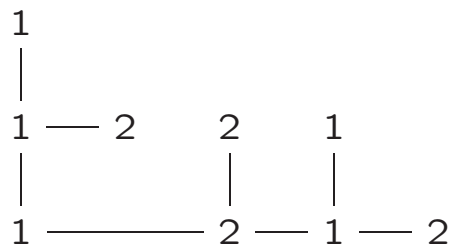
$$\alpha > \beta_k > \beta_{k-1} > \dots > \beta_0$$

Vergelijk met **super-G-notatie**, maar nu **onbegrensde coëfficiënten**.

Zelfde structuur als een **boom** met positieve natuurlijke getallen.

Normaalvorm voor ordinaalgetallen $< \epsilon_0$

Boom bij $\omega^{\omega+2} + \omega^2 * 2 + \omega + 2$ afgeleid van $\varphi(266, 3)$



Bomen: de 'ultieme' datastructuur in de informatica

Meer structuur dan lijsten, maar niet expressiever dan geneste lijsten

Let op dat $\alpha > \beta_k$ niet voor elke ordinaal α geldt

Wel geldt i.h.a. $\alpha \geq \beta_k$; gelijkheid bij $\alpha = \epsilon_0$, want $\epsilon_0 = \omega^{\epsilon_0}$

Bewijs van Stelling van Goodstein

Schrijf N in super- G -notatie.

Vervang hierin iedere G door ω .

Het resultaat $\varphi(N, G)$ is een ordinaalgetal $< \epsilon_0$.

Bijvoorbeeld: $\varphi(266, 2) = \omega^{\omega^{\omega+1}} + \omega^{\omega+1} + \omega$

Claim: Als N', G' de opvolger in de Goodstein-rij bij N, G is, dan is

$$\varphi(N', G') < \varphi(N, G)$$

Ordinaalgetallen zijn **welgeordend**: elke dalende rij eindigt.

Bewijs van Stelling van Goodstein

Dit hoeft u niet meteen te begrijpen

N.B. De Goodstein-operatie $'-1'$ is niet ordinaal-operatie $'-1'$

Slot

- ∞ is geen getal (algebra), wel limiet (topologie)

- Ordinaalgetallen (rangorde):

$$0, 1, 2, \omega, \omega + 1, \omega * 2, \omega^2, \omega^\omega, \omega^{\omega^{\omega^{\dots}}} = \epsilon_0, \dots$$

- Kardinaalgetallen (aantal):

$$0, 1, 2, \aleph_0, 2^{\aleph_0} = c, \aleph_1, \dots$$

Slot

En zo kan ik nog oneindig lang doorgaan . . . , nou ja