

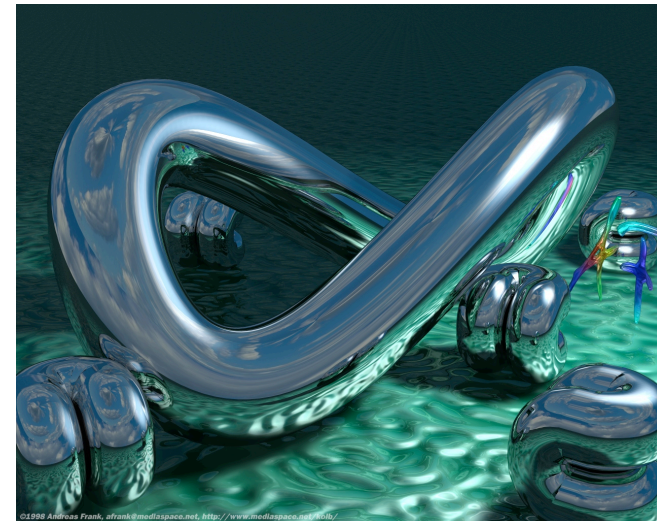
Lezing in de reeks *Oneindig*
3 oktober 2007 / Studium Generale TU Delft



Tom Verhoeff

Technische Universiteit Eindhoven
Faculteit Wiskunde & Informatica

<http://www.win.tue.nl/~wstomv/>



Er zijn **DRIE** soorten wiskundigen:

- zij die kunnen tellen en
- zij die dat *niet* kunnen

Ik zal proberen in eindige tijd wat te vertellen over oneindig

Wie waren er 5 jaar geleden bij in Maastricht?

Wie kennen het Hilbert hotel al? Wie de Stelling van Goodstein?

Belang van getallen: wetenschap, economie, maatschappij

'Meten'

Niet-wiskundige boeken over getallen:
geschiedenis, filosofie, antropologie, psychologie, mystiek

Natuurkunde: (on)eindigheid van ruimte en tijd

Oneindig in de **informatica**:
data(structuren), eindiging van 'reken'processen

't Wordt een heel verhaal, u moet wel eens wat voor lief nemen

Top tien van getallen (Clifford Pickover, 2001)

1.	0		
2.	π	3.141592653...	Archimedes, Ludolph
3.	e	2.718281828...	Napier, Euler
4.	i	$\sqrt{-1}$	Gauss
5.	$\sqrt{2}$	1.414213562...	Pythagoras
6.	1		
7.	2		
8.	γ	0.5772156649...	Euler, Mascheroni
9.	Ω	onberekenbaar	Chaitin
10.	\aleph_0	oneindig	Cantor

Getallen verzameld

- \mathbb{N} – Natuurlijke getallen: 0, 1, 2, ...
- \mathbb{Z} – Gehele getallen: ..., -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...
- \mathbb{Q} – Rationale getallen: ..., $-7\frac{2}{3}$, ..., $\frac{1}{2}$, ..., $\frac{355}{113}$, ...
- \mathbb{R} – Reële getallen: ..., γ , ..., $\sqrt{2}$, ..., e , ..., π , ..., Ω , ...
- \mathbb{C} – Complexe getallen: ..., i , ..., $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$, ...
- Keten van uitbreidingen: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Top tien van getallen (Clifford Pickover, 2001)

Alle getallen hebben wel wat, moeilijk te kiezen

Over 0, π , e , i zijn hele boeken geschreven (populair)

Niet over 1, 2 of $\sqrt{2}$ (voorzover ik weet)

Ook nog interessant:

$$\phi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) = 1.6180339887... \quad \text{Gulden Snede, Fibonacci}$$

$$\log 2 = 0.69314718... \quad \text{Mercator}$$

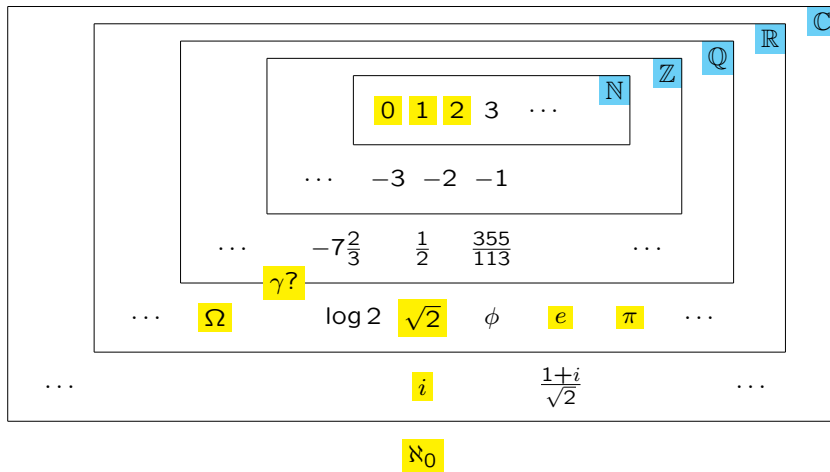
Getallen verzameld

Classificatie

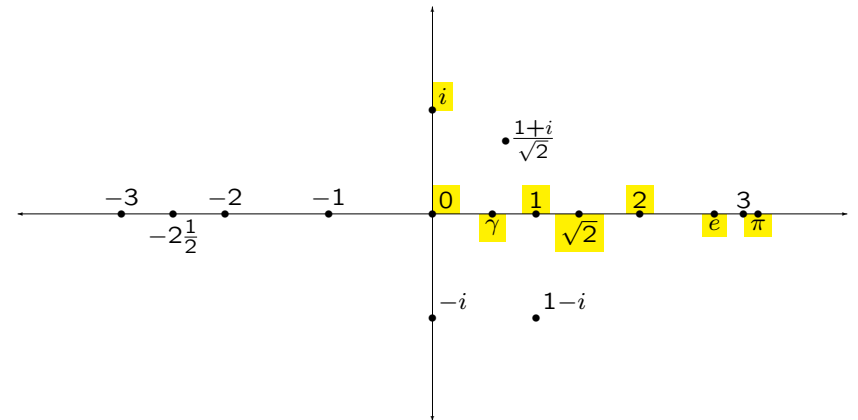
Vergelijk met biologische taxonomie

Soms onenigheid over $0 \in \mathbb{N}$

Geneste verzamelingen van getallen



Getallen als meetkundige punten: topologische structuur



Geneste verzamelingen van getallen

Volgende verzameling omvat vorige

Allemaal **oneindig** grote verzamelingen (...)

Clifford's Top Tien bevat geen getallen uit $\mathbb{Z} - \mathbb{N}$, $\mathbb{Q} - \mathbb{Z}$

$\gamma \in \mathbb{Q}$ onbekend, vermoed wordt $\gamma \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ (**irrationaal**)

$\aleph_0 \notin \mathbb{C}$

Getallen als meetkundige punten: topologische structuur

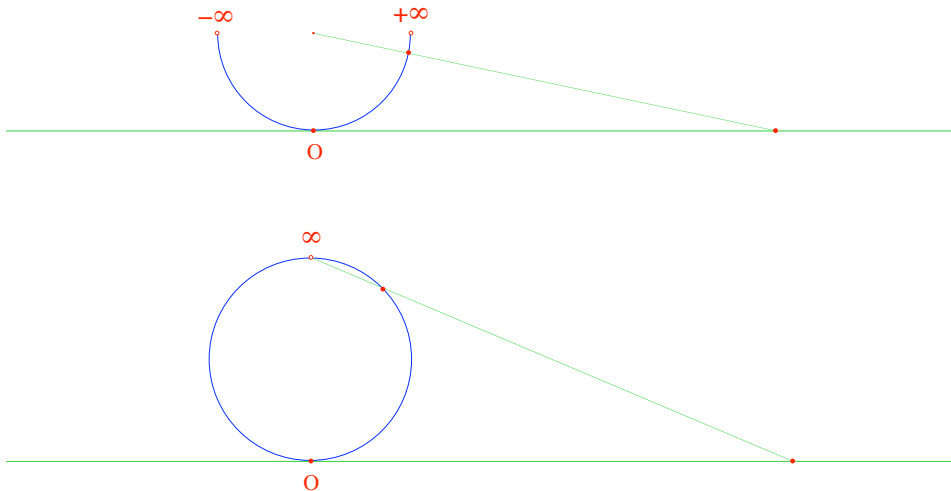
Topologische structuur: nabijheid

Meetkundige lijn (\mathbb{R}) en vlak (\mathbb{C}):

- oneindig uitgestrekt, onbegrensd, zonder grens
- oneindig dichtgepakt (dichter dan \mathbb{Q})

Punt(en) op oneindig toevoegen aan getallenlijn (animeren met Cabri)

Punt(en) op oneindig toevoegen



Punt(en) op oneindig toevoegen

Elk punt op de (horizontale rode) reële as correspondeert 1–1 met één punt op (blauwe) halve cirkel zonder eindpunten

Idem voor hele cirkel met gat

Platte vlak is op te krullen tot bol: één punt op oneindig toevoegen

Kan ook met één extra punt per richting: halve bol met 'kruiskap' (projectieve vlak)

Bewerkingen op getallen: algebraïsche structuur

\mathbb{N} : $a+b$ (optellen), $a*b$ (vermenigvuldigen), a^b (machtsverheffen)

\mathbb{Z} : $a-b$ (aftrekken: $a = x+b$)

\mathbb{Q} : a/b (delen: $a = x*b$)

\mathbb{R} : $\sqrt[b]{a}$ (worteltrekken: $a = x^b$),

$\log_b a$ (logaritme: $a = b^x$)

\mathbb{C} : nulpunten van polynomen, bijv. $x^2 + 1 = 0$

Bewerkingen op getallen: algebraïsche structuur

Eenheidselement, nulelement, inverse, associatief, distributief

Ordering

Uitbreiding met doel bewerkingen **gesloten** te maken ofwel bepaalde (algebraïsche) vergelijkingen oplosbaar te maken \mathbb{Z} (schulden, debet); \mathbb{Q} (taart delen)

Machtsverheffen in \mathbb{Z} en \mathbb{Q} : $b \in \mathbb{N}$

Machtsverheffen in \mathbb{R} : $b \in \mathbb{N} \vee a > 0 \vee (-b \in \mathbb{N} \wedge a \neq 0)$

Delen in \mathbb{Q} , \mathbb{R} en \mathbb{C} : $b \neq 0$

Worteltrekken in \mathbb{R} : $a > 0$

Logaritme in \mathbb{R} : $a > 0$ en $b > 0$

Logaritme in \mathbb{C} : $a \neq 0$ en $b \neq 0$ en $|b| \neq 1$

Potentieel oneindige processen (...)

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \pm \dots$$

$$\frac{2}{\pi} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \dots$$

$$e = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$

Oneindig bij limiet van rij ($n \rightarrow \infty$)

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \rightarrow 0$$

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$$

NIET: $\frac{1}{\infty}$

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1, \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2, \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3, \dots \rightarrow e$$

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

NIET: $\left(1 + \frac{1}{\infty}\right)^\infty$

Potentieel oneindige processen (...)

Reële getallen als limiet van (potentieel) oneindige processen

Het oneindige dat nooit **actueel** 'echt' bestaat of bereikt wordt

Bij e : algemene term $\frac{1}{n!}$

Bijv. bij $\sqrt{2}$: kwadraat van **kettingbreuk** steeds dichterbij 2

$$\phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \pm \dots$$

Oneindig bij limiet van rij ($n \rightarrow \infty$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = \sqrt{e}$$

Is ook = $\left(1 + \frac{1}{\infty}\right)^\infty$

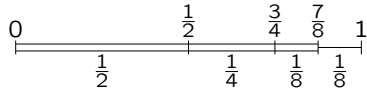
Dit leidt tot een **topologisch oneindig**

Je kan er willekeurig dichtbij komen

'Snelheid' van nadering ook van belang

Oneindig bij limiet van reeks ($\sum_{k=1}^{\infty}$)

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n}$$



$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

$$\infty = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

Fictieve oneindige 'getallen'

- Topologisch: limiet $\rightarrow \infty$

Al dan niet onderscheid tussen $-\infty$ en $+\infty$

- Algebraïsch: **bestaat niet**

$\infty - 1 = ?$ ofwel $? + 1 = \infty$

Oneindig bij limiet van reeks ($\sum_{k=1}^{\infty}$)

Paradox van **Zeno**

Ook nog interessant (*harmonische reeks*):

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} H_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} H_n - \log n$$

en

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$$

Fictieve oneindige 'getallen'

Algebraïsch oneindig bestaat niet (in volle glorie): $\infty - 1 = x$

- x niet eindig, want eindig plus 1 is eindig
- x niet ∞ , want dan (schraapeigenschap) $1 = 0$

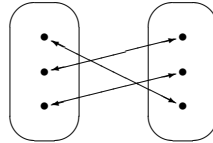
Eigenschappen opofferen (die 'gewone' getallen wel hebben)

'Echte' oneindige getallen

Kardinaalgetallen als maat voor grootte van verzamelingen:

0, 1, 2, 3, ..., \aleph_0 , ...

Gelijkmachtigheid: 1-1 correspondentie



Ordinaalgetallen als maat voor rangorde:

eerste, tweede, ..., ω , ..., ϵ_0 , ...

Wel-geordende rij: lineair, elke deelrij heeft minimum

Kardinaalgetallen: aftelbaarheid

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &= \{ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ \dots \} \\ &\quad \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \\ \mathbb{N}^+ &= \{ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ \dots \} \\ &\quad \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \\ \mathbb{N}^{even} &= \{ 0 \ 2 \ 4 \ 6 \ 8 \ 10 \ 12 \ 14 \ 16 \ \dots \} \\ &\quad \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \\ \mathbb{Z} &= \{ 0 \ -1 \ 1 \ -2 \ 2 \ -3 \ 3 \ -4 \ 4 \ \dots \} \\ &\quad \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \\ \mathbb{Q}^+ &= \{ \frac{1}{1} \ \frac{1}{2} \ \frac{2}{1} \ \frac{1}{3} \ \frac{3}{1} \ \frac{1}{4} \ \frac{2}{3} \ \frac{3}{2} \ \frac{4}{1} \ \dots \} \\ &\quad |\mathbb{N}| = \aleph_0 \end{aligned}$$

'Echte' oneindige getallen

Kardinaalgetallen vaak in populaire literatuur, daarom kort doen.

Aftelbaar, overaftelbaar, Hilbert-hotel

Ordinaalgetallen: ruggengraat van de **moderne verzamelingsleer**

Informatica: onderzoek naar **eindiging** van rekenprocessen;
datastructuren (samenpakking van informatie)

Kardinaalgetallen: aftelbaarheid

Aftelbaar \Leftrightarrow gelijkmatig met \mathbb{N}

\aleph_0 = kleinste oneindige kardinaalgetal

Volgorde niet van belang!

Oneindig \Leftrightarrow gelijkmatig met echte deelverzameling

Banach–Tarski paradox: eenheidsbol is in 5 stukken te verdelen, waarvan 2 eenheidsbollen te maken zijn

Kardinaalgetallen: overaftelbaarheid

$a \in V$	\leftrightarrow	deelverzameling $S_a \subseteq V$				
		0	1	2	3	...
0	\leftrightarrow	●	○	○	○	
1	\leftrightarrow	○	●	●	○	
2	\leftrightarrow	●	●	○	○	
3	\leftrightarrow	○	○	●	●	
⋮						
?	\leftrightarrow	○	●	●	○	
		complement van diagonaal				

$$|V| < |2^V| = 2^{|V|}$$

$$\aleph_0 = |\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}| = |\mathbb{C}| = 2^{\aleph_0} = c$$

Informatica: Eindiging van 'reken'processen

Termherschrijfsysteem:

- Begin met eindig rijtje over $\{a, b, c\}$
- Vervang herhaaldelijk deelrijtjes:

$$aa \rightarrow bc$$

$$bb \rightarrow ac$$

$$cc \rightarrow ab$$

Voorbeeld:

$$bb\underline{aa} \rightarrow \underline{bb}bc \rightarrow \underline{ba}cc \rightarrow \underline{ba}ab \rightarrow \underline{bb}cb \rightarrow \underline{acc}b \rightarrow \underline{aabb} \rightarrow \underline{aa}ac \rightarrow \underline{ab}cc \rightarrow abab$$

Eindigt dit voor elk beginrijtje?

Kardinaalgetallen: overaftelbaarheid

Diagonaalargument van Cantor

$$D = \{a \in V \mid a \notin S_a\}$$

$$a \in D \Leftrightarrow a \notin S_a$$

$$D \neq S_a$$

Machtsverheffen: $B^A =$ verzameling van alle afbeeldingen $A \rightarrow B$

$2^V =$ verzameling van alle deelverzamelingen van V : $S \subseteq V \Leftrightarrow S \in 2^V$

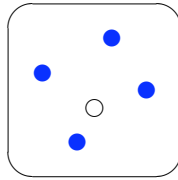
Geldt voor elke V (niet noodzakelijk eindig of aftelbaar)

Continuum $c = 2^{\aleph_0}$

Informatica: Eindiging van 'reken'processen

Dieter Hofbauer and Johannes Waldmann:
 "Termination of $\{aa \rightarrow bc, bb \rightarrow ac, cc \rightarrow ab\}$ ".
Inf. Process. Lett. **98**(4):156–158 (2006).

Knikkerspel 1



Pak telkens een knikker:

- Verwijder 'm

Eindigt dit? Na hoeveel zetten?

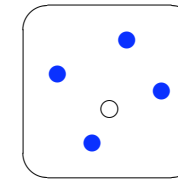
Knikkerspel 1

Gegeven een zak met een **eindig aantal knikkers**.

Zolang de zak niet leeg is, halen we er telkens één uit.

Dit eindigt na K stappen, als er initieel K knikkers zijn.

Knikkerspel 2



Pak telkens een knikker:

- Als blauw, dan verwijderen
- Als wit, dan vervangen door **één blauwe**

Knikkerspel 2

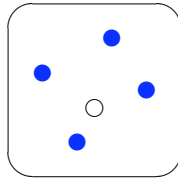
Je hebt nu ook een **onbeperkte** voorraad (blauwe) knikkers

Het aantal neemt niet altijd af

Als je ook een blauwe door een witte zou vervangen, dan **niet eindig**

Wat als je twee blauwe teruglegt voor een witte?

Knikerspel 3



Pak telkens een knikker:

- Als blauw, dan verwijderen
- Als wit, dan vervangen door **willekeurig eindig aantal blauwe**

Knikerspel 3

Als dat **willekeurig** u niet zint,

lees dan 'in N -de stap door N blauwe'

Knikerspel analyse

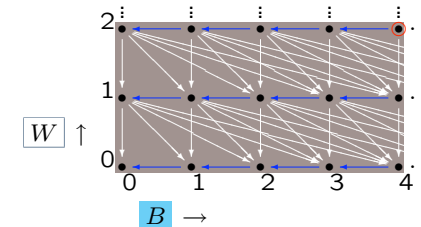
W witte knikers

B blauwe knikers

Spel 1. Eindigt na $W + B$ stappen

Spel 2. Eindigt na $2 * W + B$ stappen

Spel 3. Eindigt na ten hoogste $\omega * W + B$ stappen



Knikerspel analyse

Wat als **twee** blauwe terugleggen? $3 * W + B$ stappen

En N blauwe terugleggen (vaste N)? $(N+1) * W + B$ stappen

En nu N terugleggen **in N -de stap**?

Geen enkele **eindige** weegfactor is zwaar genoeg

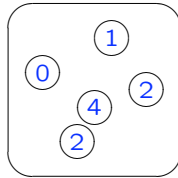
$N < \omega$ voor elke eindige N : $\omega * (W-1) + B + N < \omega * W + B$

Is elke **dalende** rij toch eindig? Zijn er goede rekenregels met ω ?

Vergelijk met **lexicografische ordening** op paren

Ook met **rode** knikers (\rightarrow wit): $\omega^2 * R + \omega * W + B$

Lottobalspel



Pak telkens een \mathbb{N} -genummerde lottobal:

- Vervang door willekeurig aantal met kleinere waarden
d.w.z. (n) vervangen door $(<n)$ $(<n)$ \dots $(<n)$

Lottobalspel

Verder generaliseren: onbeperkt aantal (genummerde) kleuren

Als dat willekeurig u niet zint,

lees dan 'in N -de stap door N kleinere waarden'

Eindigt dit altijd, en waarom?

Wat gebeurt er met (0)? Komt niets voor terug!

Nu op naar het **ultieme spel**: Stelling van Goodstein

Bewerkingen op natuurlijke getallen

Opvolger (1 erbij): $a|$

Optellen (herhaald 1 erbij): $a + b = a \overbrace{|\dots|}^{b \times}$

Vermenigvuldigen (herhaald optellen): $a * b = \overbrace{a + \dots + a}^{b \times}$

$$a * 0 = 0 \quad a * 1 = a \quad a * b| = a * b + a \quad a * (b + c) = a * b + a * c$$

Machtsverheffen (herhaald vermenigvuldigen): $a^b = \overbrace{a * \dots * a}^{b \times}$

$$a^0 = 1 \quad a^1 = a \quad a^{b|} = a^b * a \quad a^{b+c} = a^b * a^c$$

Bewerkingen op natuurlijke getallen

Om Stelling van Goodstein te formuleren moet je wat rekenen

Notatie $a|$ is niet standaard: **turfje erbij**

Bemerk de gelijkvormige eigenschappen voor $*$ en \uparrow

Optellen en vermenigvuldigen zijn **commutatief**

$$a + b = b + a \quad a * b = b * a$$

Maar machtsverheffen *niet*: $2^3 = 8 \neq 9 = 3^2$

Daarom ook twee inversen (linker en rechter: $\sqrt[b]{a}$ en $\log_b a$)

Decimale notatie

Ieder natuurlijk getal is op *unieke* wijze te schrijven als

som van machten van 10 met coëfficiënten < 10 .

Voorbeeld:

$$\begin{aligned} 266 &= 200 + 60 + 6 \\ &= 2 * 100 + 6 * 10 + 6 * 1 \\ &= 2 * 10^2 + 6 * 10^1 + 6 * 10^0 \end{aligned}$$

Decimale notatie

Coëfficiënten c_i (kunnen 0 zijn; reden voor introductie 0)

Exponenten i (in positiesysteem gecodeerd door positie)

$$N = \sum_{i=0}^k c_i * 10^i$$

Vergelijk: rijtje waarden < 10

Notatie in grondtal $G \geq 2$

Ieder natuurlijk getal is op *unieke* wijze te schrijven als

som van machten van G met coëfficiënten $< G$.

Voorbeeld met $G = 2$ (*binair*):

$$\begin{aligned} 266 &= 256 + 8 + 2 \\ &= 2^8 + 2^3 + 2^1 \end{aligned}$$

Voorbeeld met $G = 3$ (*ternair*):

$$\begin{aligned} 266 &= 243 + 18 + 3 + 2 \\ &= 3^5 + 2 * 3^2 + 3^1 + 2 * 3^0 \end{aligned}$$

Notatie in grondtal $G \geq 2$

Binair: coëfficiënten 0 of 1

Ternair: coëfficiënten 0, 1 of 2

Coëfficiënt 0: term weglaten ($0 * a = 0$)

Coëfficiënt 1: coëfficiënt weglaten $1 * a = a$

Exponent 0: macht weglaten ($c * a^0 = c * 1 = c$)

Exponent 1: exponent weglaten ($a^1 = a$)

Super- G -notatie met grondtal $G \geq 2$

1. Noteer in grondtal G .
2. Herhaal met de exponenten.
3. Stop zodra alle getallen $\leq G$.

Voorbeeld:

$G = 2$	$G = 3$
$266 = 2^8 + 2^3 + 2$	$266 = 3^5 + 2 * 3^2 + 3^1 + 2$
$= 2^{2^3} + 2^{2+1} + 2$	$= 3^{3+2} + 2 * 3^2 + 3^1 + 2$
$= 2^{2^{2+1}} + 2^{2+1} + 2$	

Goodstein-rij van $N > 0$ en $G \geq 2$

1. Schrijf N in super- G -notatie.
2. Vervang hierin elke G door $G + 1$.
3. Verminder met 1; geeft nieuwe N .
4. Verhoog G met 1.
5. Stop als $N = 0$, anders vanaf stap 1 herhalen.

$$N = 8 \quad G = 2$$

$$8 = 2^{2+1}$$

$$3^{3+1} = 81$$

$$N' = 80$$

$$G' = 3$$

Super- G -notatie met grondtal $G \geq 2$

Herhalen: elementair principe (kinderspelen, moppen)

Herhaald machtsverheffen groeit heel hard

Bij $G = 10$ gebeurt er pas wat vanaf 100 miljard:

$$100\,000\,000\,000 = 10^{10+1}$$

Daaronder hetzelfde als notatie in grondtal 10

Goodstein-rij van $N > 0$ en $G \geq 2$

Dadelijk nog een groter voorbeeld

Vraag (nog) niet hoe Goodstein hier op kwam of waar het toe dient

Goodstein-rij bij $N = 266$ en $G = 2$

Volgnr.	N	G
1	266 $2^{2^{2+1}} + 2^{2+1} + 2$	2
2	$3^{3^{3+1}} + 3^{3+1} + 3 - 1$ 443...886 (39 cijfers) $3^{3^{3+1}} + 3^{3+1} + 2$	3
3	$4^{4^{4+1}} + 4^{4+1} + 2 - 1$ 323...681 (617 cijfers) $4^{4^{4+1}} + 4^{4+1} + 1$	4
4	$5^{5^{5+1}} + 5^{5+1} + 1 - 1$... (> 10 000 cijfers) $5^{5^{5+1}} + 5^{5+1}$	5

Goodstein-rij bij $N = 266$ en $G = 2$

Gaat natuurlijk verder na 4e waarde, maar rijst de pan uit

De getallen doen duidelijk hun best oneindig groot te worden :-)

Tussenresultaat voor N hoeft je niet uit te rekenen, want je kan meteen van notatie in grondtal G naar $G + 1$ (geel → geel)

$$G^E - 1 = H * G^{E-1} + \dots + H * G + H \quad \text{met } H = G - 1$$

$$10^E - 1 = \underbrace{9 \dots 9}_{E \times} \quad \text{voor } E \geq 1$$

Spelversie: **Hercules en de Hydra** (draak met **vertakkende** nekken)

Stelling van Goodstein (1944)

Elke Goodstein-rij eindigt met $N = 0$.

't Kan even duren:

- $N = 3, G = 2$ eindigt na 5 stappen
- $N = 4, G = 2$ eindigt na $3 * 2^{402653211} - 3 \approx 10^{108}$ stappen

Stelling van Goodstein (1944)

Die -1 doet 't 'm, die hamert maar door ...

Aantal stappen groeit supersuperexponentieel met N
Lijkt op **Ackermann-functie**

Contrast met **onbewezen vermoedens** over tammere rekenprocessen:

Tel getal bij zijn omkering op, tot **palindroom** ontstaat
152 → 152 + 251 = 403 → 403 + 304 = 707 196 → ?

Als N even → $N/2$, als N oneven → $3N + 1$ (Collatz)
3 → 10 → 5 → 16 → 8 → 4 → 2 → 1 → 4 → ...

Bewijsbaarheid van Stelling van Goodstein

Stelling van Kirby en Paris (1982):

De Stelling van Goodstein volgt *niet* uit de Peano Axioma's.

'Gewone' inductie is niet toereikend, Goodstein rij 'groeit te snel'.

Elk bewijs van de Stelling van Goodstein vergt (een vorm van) *transfinitie* inductie zoals met *ordinaalgetallen*.

Ordinaalgetallen t/m ω

Ordinaalgetal is verzameling van al zijn voorgangers:

$$\begin{aligned}0 &= \{\} \\1 &= \{0\} \\2 &= \{0, 1\} \\3 &= \{0, 1, 2\} \\&\vdots \\N &= \{0, 1, 2, \dots, N-1\} \\&\vdots \\ \omega &= \{0, 1, 2, \dots\}\end{aligned}$$

ω is kleinste oneindige ordinaalgetal: $N < \omega$ voor alle $N \in \mathbb{N}$

Bewijsbaarheid van Stelling van Goodstein

Peano Axioma's (PA):

1. $0 \in \mathbb{N}$
2. $a \in \mathbb{N} \Rightarrow a| \in \mathbb{N}$
3. $\forall a \in \mathbb{N} : a| \neq 0$
4. $a| = b| \Rightarrow a = b$
5. $0 \in S \wedge (\forall a \in \mathbb{N} : a \in S \Rightarrow a| \in S) \Rightarrow \mathbb{N} \subseteq S$

Axioma 5: **Inductie** (basis, stap),
vergelijk met omvallende rij dominostenen (begin, doortikken)

Onvolledigheidsstelling van Gödel over PA (1930):

Er bestaan ware uitspraken, die onbewijsbaar zijn in PA

Maar nu met 'echte' rekenkundige stelling die onbewijsbaar is in PA

Ordinaalgetallen t/m ω

Ruggengraat van de moderne verzamelingsleer

\subset correspondeert met $<$

\cup correspondeert met maximum nemen

\cap correspondeert met minimum nemen

Rekenen met ordinaalgetallen

Opvolger (1 erbij): $\alpha| = \alpha \cup \{\alpha\}$

Limiet: $\bigcup_{\alpha \in A} \alpha \quad \spadesuit \times 1, \spadesuit \times 2, \dots \rightarrow \spadesuit \times \omega = \bigcup_{\alpha \in \omega} \spadesuit \times \alpha$

Optellen (herhaald 1 erbij)

Vermenigvuldigen (herhaald optellen)

Machtsverheffen (herhaald vermenigvuldigen)

Rekenen met ordinaalgetallen

Net als bij natuurlijke getallen, maar nu limiet erbij

$$2| = \{0, 1\}| = \{0, 1, 2\} = 3$$

Ook ω keer iets herhalen: $\omega * \omega = \overbrace{\omega + \dots}^{\omega \times}$

Pas op met rekenen Niet alle regels gelden meer: $1 + \omega = \omega \neq \omega + 1$

$$2 * \omega = \overbrace{2 + \dots}^{\omega \times} = \overbrace{1 + 1 + \dots}^{\omega \times} = \overbrace{1 + \dots}^{\omega \times} = 1 * \omega = \omega$$

$$\omega * 2 = \omega + \omega = \overbrace{1 + \dots}^{\omega \times} + \overbrace{1 + \dots}^{\omega \times} \neq \omega$$

Niet commutatief; wel associatief en $*$ distribueert van links over $+$

Meer oneindige ordinaalgetallen

$$\omega, \quad \omega + 1, \quad \omega + 2, \quad \overbrace{1 \dots}^1, \quad \omega + \omega = \omega * 2$$

$$\omega * 2 + 1, \quad \omega * 2 + 2, \quad \overbrace{1 \dots}^1, \quad \omega * 2 + \omega = \omega * 3$$

$$\overbrace{1 \dots}^1, \quad \omega * 4, \quad \overbrace{1 \dots}^1, \quad \omega * 5, \quad \overbrace{2 \dots}^2, \quad \omega * \omega = \omega^2$$

$$\omega^2 + 1, \quad \overbrace{1 \dots}^1, \quad \omega^2 + \omega, \quad \overbrace{2 \dots}^2, \quad \omega^2 + \omega^2 = \omega^2 * 2$$

$$\overbrace{2 \dots}^2, \quad \omega^2 * 3, \quad \overbrace{2 \dots}^2, \quad \omega^2 * 4, \quad \overbrace{3 \dots}^3, \quad \omega^2 * \omega = \omega^3$$

$$\overbrace{4 \dots}^4, \quad \omega^4, \quad \overbrace{5 \dots}^5, \quad \omega^5, \quad \overbrace{\omega \dots}^{\omega}, \quad \omega^\omega$$

Meer oneindige ordinaalgetallen

Tot ω^2 : $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, 1e kwadrant van **2-dimensionale** rooster

$$\begin{array}{ccc} \vdots & & \\ \omega * 3 & \dots & \\ \omega * 2 & \omega * 2 + 1 & \dots \\ \omega & \omega + 1 & \omega + 2 & \dots \\ 0 & 1 & 2 & \dots \end{array}$$

Tot ω^N in **N-dimensionale** rooster

Alternatief: \mathbb{N} samenpersen op stukje van $\mathbb{Q}[0, 1)$: $n \rightarrow 1 - \frac{1}{2^n}$

Dan $[\omega, \omega * 2) \rightarrow \mathbb{Q}[1, 1\frac{1}{2})$

I.h.a. $\omega * n \rightarrow 2 - \frac{1}{2^n}$, dan $\omega^2 \rightarrow 2$

Normaalvorm voor ordinaalgetallen $< \omega^\omega$

Normaalvorm van $\alpha < \omega^\omega$:

$$\alpha = \omega^k * c_k + \omega^{k-1} * c_{k-1} + \dots + \omega^2 * c_2 + \omega * c_1 + c_0$$

waarbij k en alle c_i eindig zijn.

Vergelijk met **decimale notatie**:

$$N = 10^k * c_k + 10^{k-1} * c_{k-1} + \dots + 10^2 * c_2 + 10 * c_1 + c_0$$

waarbij $0 \leq c_i < 10$, maar nu **onbegrensde coëfficiënten**.

Zelfde structuur als eindige **lijst** natuurlijke getallen: $[c_k, c_{k-1}, \dots, c_1, c_0]$.

Op naar epsilon nul

$$0, 1, \dots, \omega, \dots, \omega * 2, \dots, \omega^2, \dots, \omega^\omega$$

$$\omega^\omega + 1, \dots, \omega^\omega * 2, \dots, \omega^\omega * \omega = \omega^{\omega+1}$$

$$\dots, \omega^{\omega*2}, \dots, \omega^{\omega^2}, \dots, \omega^{\omega^\omega}$$

$$\dots, \omega^{\omega^{\omega^\omega}}, \dots, \underbrace{\omega^{\omega^{\omega^{\omega^{\dots}}}}}_{\omega^\times} = \epsilon_0$$

ϵ_0 is kleinste oplossing van

$$\alpha = \omega^\alpha$$

Normaalvorm voor ordinaalgetallen $< \omega^\omega$

Ingewikkelder dan 1-dimensionale structuur van \mathbb{N}

Lijsten: typische datastructuur in informatica bij rekenprocessen

Oplossing voor **lottobalspel**: $c_i =$ aantal ballen met waarde i

Lexicografische ordening op lijsten over \mathbb{N}

$$\text{Inbedden in } (\mathbb{Q}, <): k + 0.\overbrace{1\dots 1}^{c_k}0\overbrace{1\dots 1}^{c_{k-1}}0\dots\overbrace{1\dots 1}^{c_{k-2}\dots c_1}0\dots\overbrace{1\dots 1}^{c_0}000\dots$$

$c_k \neq 0$

Op naar epsilon nul

Dit is al lastiger te tekenen

In te bedden in \mathbb{R}

Elke verzameling kan wel-geordend worden (Zermelo, 1904; niet uniek)

Elke wel-geordende verzameling is isomorf met een ordinaalgetal

Andere kleinste oplossingen:

$$\alpha = 1 + \alpha \quad (\omega)$$

$$\alpha = \omega + \alpha \quad (\omega * \omega = \omega^2)$$

$$\alpha = 2 * \alpha \quad \text{voor } \alpha > 0 \quad (\omega)$$

$$\alpha = \omega * \alpha \quad \text{voor } \alpha > 0 \quad (\omega^\omega)$$

$$\alpha = 2^\alpha \quad (\omega)$$

Samenvattend

- ∞ is geen getal (algebra), wel limiet (topologie)
- Kardinaalgetallen (aantal):
 $0, 1, 2, \aleph_0, \aleph_1, 2^{\aleph_0} = c, \dots$
- Ordinaalgetallen (rangorde):
 $0, 1, 2, \omega, \omega + 1, \omega * 2, \omega^2, \omega^\omega, \omega^{\omega^{\omega^{\dots}}} = \epsilon_0, \epsilon_0 + 1, \dots$

Samenvattend

$\aleph_1 =$ eerstvolgende kardinaalgetal $> \aleph_0$

Vershil tussen \aleph_1 en $c = 2^{\aleph_0}$ is 'open'

Continuum Hypothese: $c = \aleph_1$

Alternatief: $\aleph_1 < c$

Filosofische (na)beschouwingen

Grootte van het **wiskundige universium** van

Brouwer : eindig met specifieke bovengrens

Baire : eindig zonder specifieke bovengrens

Borel : aftelbaar oneindig (\aleph_0 , d.w.z. met heel \mathbb{N})

Lebesgue : $c = 2^{\aleph_0}$, gelijkmachtig met het continuüm \mathbb{R}

Zermelo : alomvattend

Filosofische (na)beschouwingen

Platonisme, formalisme, intuïtionisme, constructivisme

Verzameling van alle functies $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heeft cardinaliteit

$$\begin{aligned}c^c &= (2^{\aleph_0})^c \\ &= 2^{\aleph_0 * c} \\ &= 2^c \\ &> c\end{aligned}$$