

# Bijzondere getallen

---

## Oneindig (als getal)

*Tom Verhoeff*

Technische Universiteit Eindhoven  
Faculteit Wiskunde en Informatica

T.Verhoeff@TUE.NL

<http://www.win.tue.nl/~wstomv/>



## Top tien van getallen (Clifford Pickover, 2001)

---

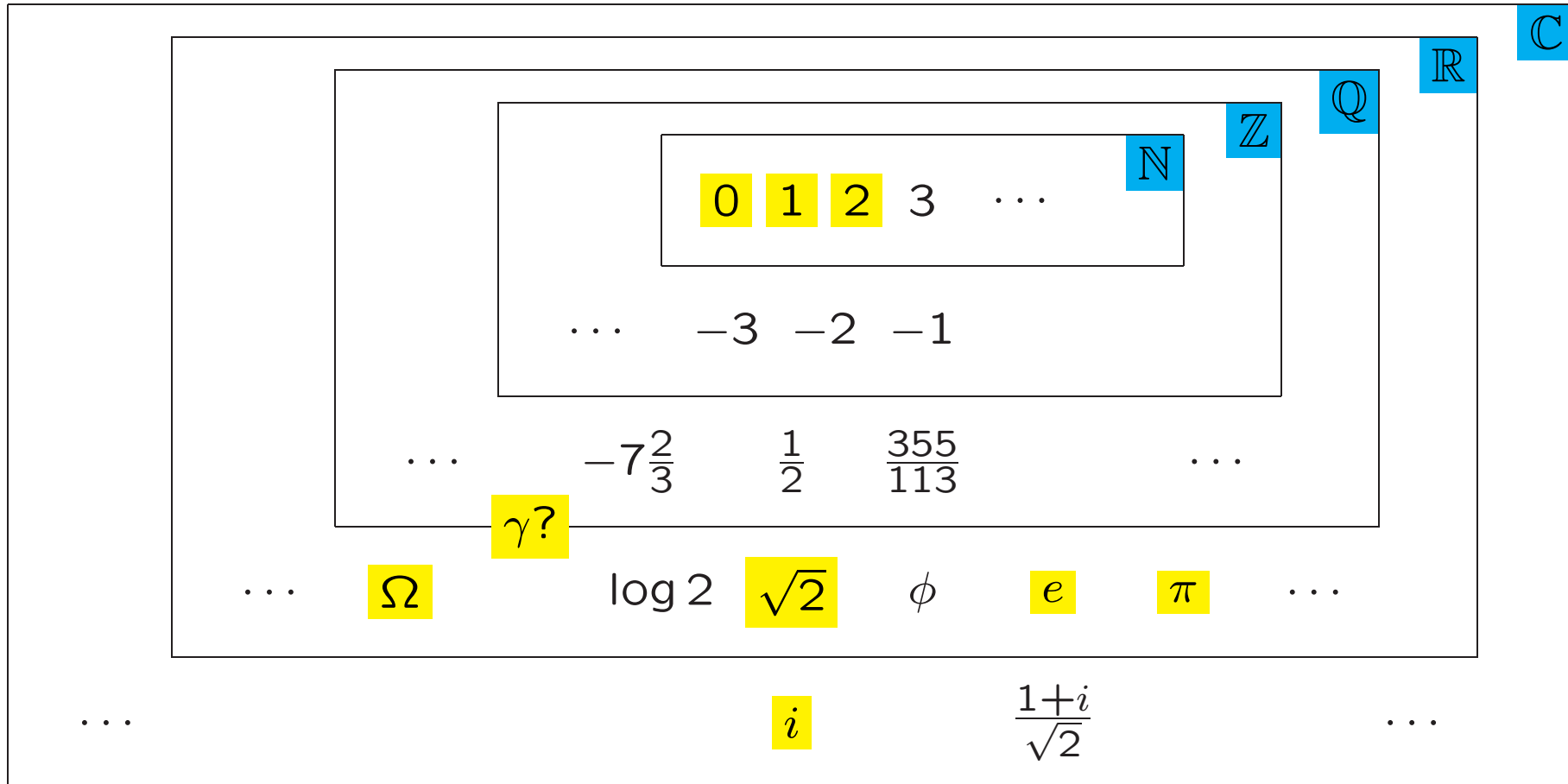
1.	0		
2.	$\pi$	3.141592653...	Archimedes, Ludolph
3.	$e$	2.718281828...	Napier, Euler
4.	$i$	$\sqrt{-1}$	Gauss
5.	$\sqrt{2}$	1.414213562...	Pythagoras
6.	1		
7.	2		
8.	$\gamma$	0.5772156649...	Euler, Mascheroni
9.	$\Omega$	<i>onberekenbaar</i>	Chaitin
10.	$\aleph_0$	<i>oneindig</i>	Cantor

## Getallen verzameld

---

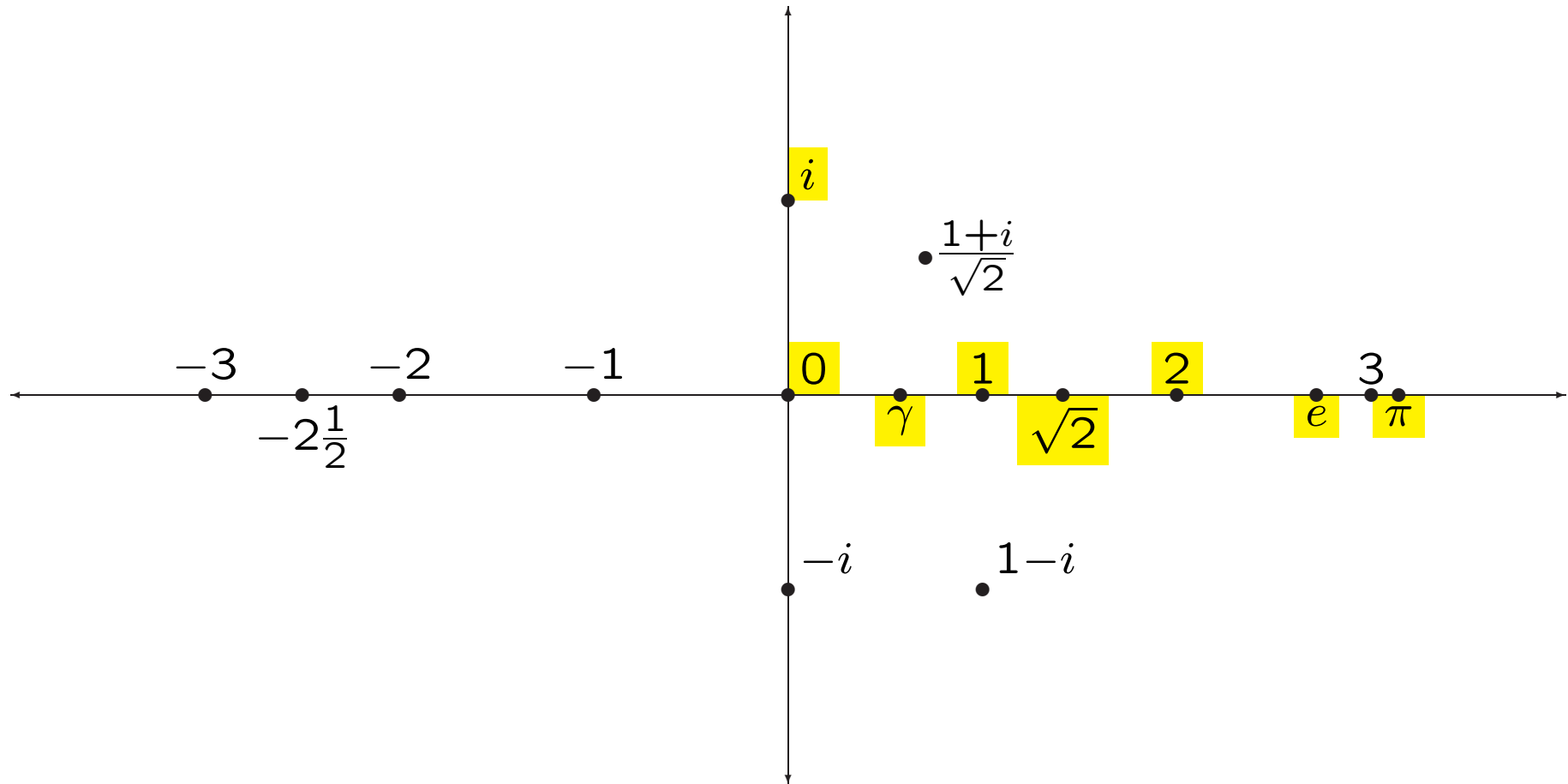
- $\mathbb{N}$  – Natuurlijke getallen: 0, 1, 2, ...
- $\mathbb{Z}$  – Gehele getallen: ..., -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...
- $\mathbb{Q}$  – Rationele getallen: ...,  $-7\frac{2}{3}$ , ...,  $\frac{1}{2}$ , ...,  $\frac{355}{113}$ , ...
- $\mathbb{R}$  – Reële getallen: ...,  $\gamma$ , ...,  $\sqrt{2}$ , ...,  $e$ , ...,  $\pi$ , ...,  $\Omega$ , ...
- $\mathbb{C}$  – Complexe getallen: ...,  $i$ , ...,  $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ , ...
- Keten van uitbreidingen:  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

# Geneste verzamelingen van getallen



$\mathbb{N}_0$

# Getallen als meetkundige punten: topologische structuur



## Bewerkingen op getallen: algebraïsche structuur

---

$\mathbb{N}$ :  $a+b$  (optellen),  $a*b$  (vermenigvuldigen),  $a^b$  (machtsverheffen)

$\mathbb{Z}$ :  $a-b$  (aftrekken:  $a = x+b$ )

$\mathbb{Q}$ :  $a/b$  (delen:  $a = x * b$ )

$\mathbb{R}$ :  $\sqrt[b]{a}$  (worteltrekken:  $a = x^b$ ),

$\log_b a$  (logaritme:  $a = b^x$ )

$\mathbb{C}$ : nulpunten van polynomen, bijv.  $x^2 + 1 = 0$

## Potentieel oneindige processen (...)

---

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$$

$$\frac{2}{\pi} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \dots$$

$$e = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$

## Oneindig bij limiet van rij ( $n \rightarrow \infty$ )

---

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \rightarrow 0$$

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$$

NIET:  $\frac{1}{\infty}$

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1, \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2, \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3, \dots \rightarrow e$$

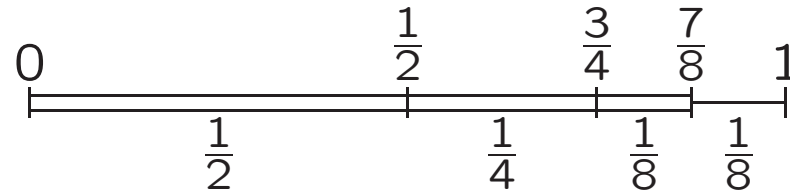
$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

NIET:  $\left(1 + \frac{1}{\infty}\right)^\infty$

## Oneindig bij limiet van reeks ( $\sum_{k=1}^{\infty}$ )

---

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n}$$



$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

$$\infty = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

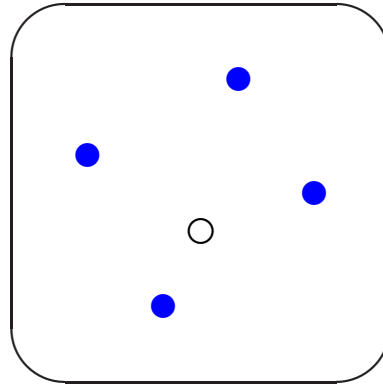
# Oneindige getallen

---

- Topologisch: limiet  $\rightarrow \infty$
- Algebraïsch: **bestaat niet** ( $\infty - 1 = ?$  ofwel  $? + 1 = \infty$ )
- Maat voor grootte van verzamelingen: **kardinaalgetallen** als  $\aleph_0$
- ‘Maat’ voor ordeningen: **ordinaalgetallen** als  $\omega$  en  $\epsilon_0$

# Knikerspel 1

---



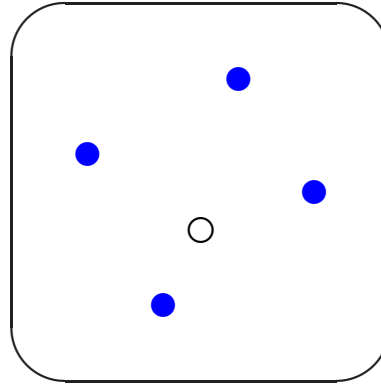
Pak telkens een knikker:

- Verwijder 'm

Eindigt dit? Na hoeveel zetten?

## Knikerspel 2

---

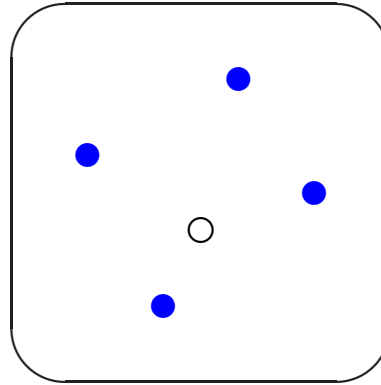


Pak telkens een knikker:

- Als blauw, dan verwijderen
- Als wit, dan vervangen door één blauwe

## Knikerspel 3

---



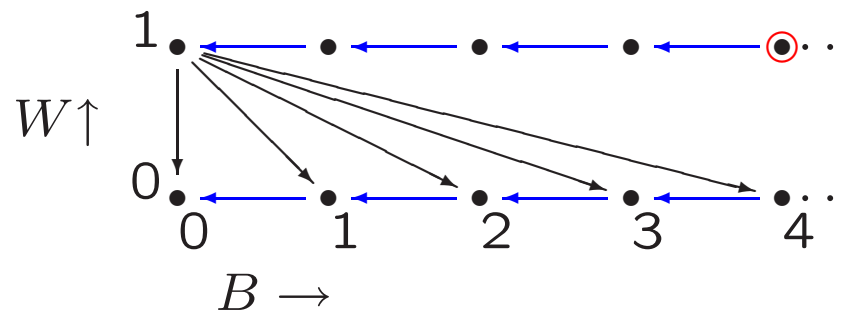
Pak telkens een knikker:

- Als blauw, dan verwijderen
- Als wit, dan vervangen door willekeurig eindig aantal blauwen

# Knikerspel analyse

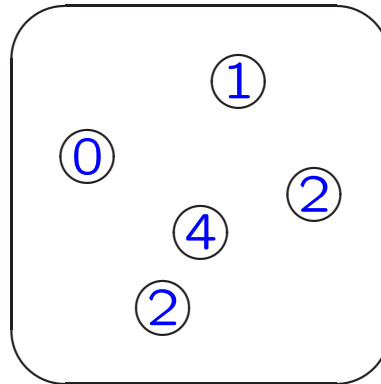
$W$  witte knikers       $B$  blauwe knikers

1. Eindigt na  $W + B$  stappen
2. Eindigt na  $2 * W + B$  stappen
3. Eindigt na ten hoogste  $\omega * W + B$  stappen



## Lottobalspel

---



Pak telkens een  $\mathbb{N}$ -genummerde lottobal:

- Vervang door **willekeurig aantal met kleinere waarden**  
d.w.z.  $(n)$  vervangen door  $(<n)$   $(<n)$  ...  $(<n)$

## Bewerkingen op natuurlijke getallen

---

Opvolger (1 erbij):  $a|$

Optellen (herhaald 1 erbij):  $a + b = a \overbrace{|\dots|}^{b \times}$

Vermenigvuldigen (herhaald optellen):  $a * b = \overbrace{a + \dots + a}^{b \times}$

$$a * 0 = 0 \quad a * 1 = a \quad a * b| = a * b + a \quad a * (b + c) = a * b + a * c$$

Machtsverheffen (herhaald vermenigvuldigen):  $a^b = \overbrace{a * \dots * a}^{b \times}$

$$a^0 = 1 \quad a^1 = a \quad a^{b|} = a^b * a \quad a^{b+c} = a^b * a^c$$

## Decimale notatie

---

Ieder natuurlijk getal is op *unieke* wijze te schrijven als

som van machten van 10 met coëfficiënten  $< 10$ .

Voorbeeld:

$$\begin{aligned} 266 &= 200 + 60 + 6 \\ &= 2 * 100 + 6 * 10 + 6 * 1 \\ &= 2 * 10^2 + 6 * 10^1 + 6 * 10^0 \end{aligned}$$

## Notatie in grondtal $G \geq 2$

---

Ieder natuurlijk getal is op *unieke* wijze te schrijven als

som van machten van  $G$  met coëfficiënten  $< G$ .

Voorbeeld met  $G = 2$  (*binair*):

$$\begin{aligned} 266 &= 256 + 8 + 2 \\ &= 2^8 + 2^3 + 2^1 \end{aligned}$$

Voorbeeld met  $G = 3$  (*ternair*):

$$\begin{aligned} 266 &= 243 + 18 + 3 + 2 \\ &= 3^5 + 2 * 3^2 + 3^1 + 2 * 3^0 \end{aligned}$$

## Super- $G$ -notatie met grondtal $G \geq 2$

---

1. Noteer in grondtal  $G$ .
2. Herhaal met de *exponenten*.
3. Stop zodra alle getallen  $\leq G$ .

Voorbeeld met  $G = 2$ :

$$\begin{aligned} 266 &= 2^8 + 2^3 + 2 \\ &= 2^{2^3} + 2^{2+1} + 2 \\ &= 2^{2^{2+1}} + 2^{2+1} + 2 \end{aligned}$$

## Goodstein-rij van $N > 0$ en $G \geq 2$

---

$$N = 8 \quad G = 2$$

1. Schrijf  $N$  in **super- $G$ -notatie**.

$$8 = 2^{2+1}$$

2. Vervang hierin elke  $G$  door  $G + 1$ .

$$3^{3+1} = 81$$

3. Verlaag nieuwe  $N$  met 1.

$$N' = 80$$

4. Verhoog  $G$  met 1.

$$G' = 3$$

5. Stop als  $N = 0$ , anders vanaf stap 1 herhalen.

## Goodstein-rij bij $N = 266$ en $G = 2$

Volgnr.	$N$	$G$
1	$266$ $2^{2^{2+1}} + 2^{2+1} + 2$ $3^{3^{3+1}} + 3^{3+1} + 3 - 1$	2
2	443...886 (39 cijfers) $3^{3^{3+1}} + 3^{3+1} + 2$ $4^{4^{4+1}} + 4^{4+1} + 2 - 1$	3
3	323...681 (617 cijfers) $4^{4^{4+1}} + 4^{4+1} + 1$ $5^{5^{5+1}} + 5^{5+1} + 1 - 1$	4
4	... (> 10 000 cijfers) $5^{5^{5+1}} + 5^{5+1}$	5

## Stelling van Goodstein (1944)

---

Elke Goodstein-rij eindigt met  $N = 0$ .

't Kan even duren:

- $N = 3, G = 2$  eindigt na **5** stappen
- $N = 4, G = 2$  eindigt na  **$3 * 2^{402\,653\,211} - 3 \approx 10^{10^8}$**  stappen

## Bewijsbaarheid van Stelling van Goodstein

---

Stelling van Kirby en Paris (1982):

De Stelling van Goodstein volgt *niet* uit de Peano Axioma's.

'Gewone' inductie is niet toereikend, Goodstein rij 'groeit te snel'.

Elk bewijs van de Stelling van Goodstein vergt (een vorm van) *transfinitie* inductie zoals met *ordinaalgetallen*.

## Ordinaalgetallen t/m $\omega$

---

Ordinaalgetal is verzameling van al zijn voorgangers:

$$0 = \{ \}$$

$$1 = \{ 0 \}$$

$$2 = \{ 0, 1 \}$$

$$3 = \{ 0, 1, 2 \}$$

$\vdots$

$$N = \{ 0, 1, 2, \dots, N-1 \}$$

$\vdots$

$$\omega = \{ 0, 1, 2, \dots \}$$

$\omega$  is kleinste oneindige ordinaalgetal:  $N < \omega$  voor alle  $N \in \mathbb{N}$

## Rekenen met ordinaalgetallen

---

**Opvolger** (1 erbij):  $\alpha| = \alpha \cup \{\alpha\}$

**Limiet**:  $\bigcup_{\alpha \in A} \alpha$       ♠  $\times 1$ , ♠  $\times 2$ , ..., ♠  $\times \omega$

**Optellen** (herhaald 1 erbij)

**Vermenigvuldigen** (herhaald optellen)

**Machtsverheffen** (herhaald vermenigvuldigen)

## Meer oneindige ordinaalgetallen

---

$$\omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots^1, \omega + \omega = \omega * 2$$

$$\omega * 2 + 1, \omega * 2 + 2, \dots^1, \omega * 2 + \omega = \omega * 3$$

$$\dots^1, \omega * 4, \dots^1, \omega * 5, \dots^2, \omega * \omega = \omega^2$$

$$\omega^2 + 1, \dots^1, \omega^2 + \omega, \dots^2, \omega^2 + \omega^2 = \omega^2 * 2$$

$$\dots^2, \omega^2 * 3, \dots^2, \omega^2 * 4, \dots^3, \omega^2 * \omega = \omega^3$$

$$\dots^4, \omega^4, \dots^5, \omega^5, \dots^\omega, \omega^\omega$$

## Normaalvorm voor ordinaalgetallen $< \omega^\omega$

---

Normaalvorm van  $\alpha < \omega^\omega$ :

$$\alpha = \omega^k * c_k + \omega^{k-1} * c_{k-1} + \dots + \omega^2 * c_2 + \omega * c_1 + c_0$$

waarbij  $k$  en alle  $c_i$  eindig zijn.

Vergelijk met **decimale notatie**:

$$N = 10^k * c_k + 10^{k-1} * c_{k-1} + \dots + 10^2 * c_2 + 10 * c_1 + c_0$$

waarbij  $0 \leq c_i < 10$ , maar nu **onbegrensde coëfficiënten**.

Zelfde structuur als een **lijst** natuurlijke getallen:  $[c_k, c_{k-1}, \dots, c_1, c_0]$ .

## Op naar epsilon nul

---

$$\begin{aligned}
 &0, \quad 1, \quad \dots, \quad \omega, \quad \dots, \quad \omega * 2, \quad \dots, \quad \omega^2, \quad \dots, \quad \omega^\omega \\
 &\omega^\omega + 1, \quad \dots, \quad \omega^\omega * 2 \quad \dots, \quad \omega^\omega * \omega = \omega^{\omega+1} \\
 &\dots, \quad \omega^{\omega*2}, \quad \dots, \quad \omega^{\omega^2}, \quad \dots, \quad \omega^{\omega^\omega} \\
 &\dots, \quad \omega^{\omega^{\omega^\omega}}, \quad \dots, \quad \underbrace{\omega^{\omega^{\omega^{\omega^{\dots}}}}}_{\omega^\times} = \epsilon_0
 \end{aligned}$$

$\epsilon_0$  is kleinste oplossing van

$$\alpha = \omega^\alpha$$

## Normaalvorm voor ordinaalgetallen $< \epsilon_0$

---

Normaalvorm van  $\alpha < \epsilon_0$ :

$$\alpha = \omega^{\beta_k} * c_k + \omega^{\beta_{k-1}} * c_{k-1} + \dots + \omega^{\beta_0} * c_0$$

waarbij  $k$  en alle  $c_i$  eindig zijn en  $c_i \neq 0$ , en

$$\alpha > \beta_k > \beta_{k-1} > \dots > \beta_0$$

Vergelijk met **super- $G$ -notatie**, maar nu **onbegrensde coëfficiënten**.

Zelfde structuur als een **boom** met positieve natuurlijke getallen.

## Bewijs van Stelling van Goodstein

---

Schrijf  $N$  in super- $G$ -notatie.

Vervang hierin iedere  $G$  door  $\omega$ .

Het resultaat  $\varphi(N, G)$  is een ordinaalgetal  $< \epsilon_0$ .

Bijvoorbeeld:  $\varphi(266, 2) = \omega^{\omega^{\omega+1}} + \omega^{\omega+1} + \omega$

Claim: Als  $N', G'$  de opvolger in de Goodstein-rij bij  $N, G$  is, dan is

$$\varphi(N', G') < \varphi(N, G)$$

Ordinaalgetallen zijn **welgeordend**: elke dalende rij eindigt.

## Slot

---

- $\infty$  is geen getal (algebra), wel limiet (topologie)

- Ordinaalgetallen (rangorde):

$$0, 1, 2, \omega, \omega + 1, \omega * 2, \omega^2, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega \dots} = \epsilon_0, \dots$$

- Kardinaalgetallen (aantal):

$$0, 1, 2, \aleph_0, 2^{\aleph_0} = c, \aleph_1, \dots$$