MATHE KALENDER

LÖSUNGSHEFT 2011

Deutsche Mathematiker-Vereinigung

www.mathekalender.de

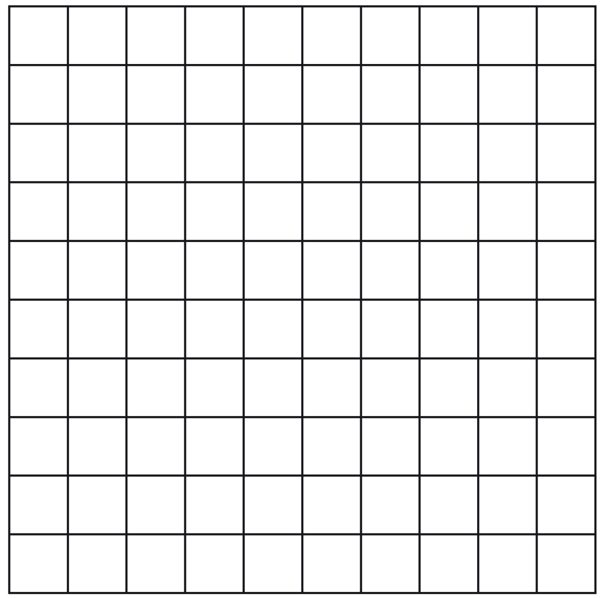
DFG-Forschungszentrum MATHEON
Mathematik für Schlüsseltechnologien

1 Geschenkeverpackung

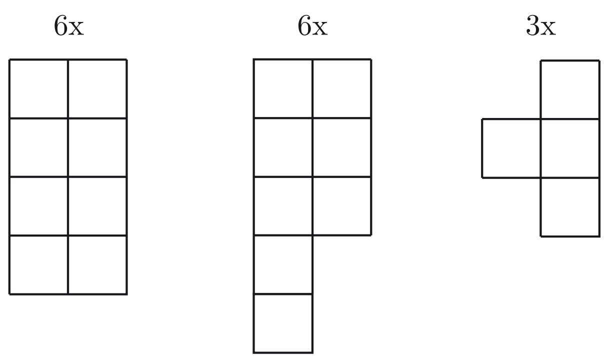
Autor: Marco Sarich

1.1 Aufgabe

„Oh nein!“schreit es aus dem Wichtellager. Das Geschenkpapier neigt sich dramatisch dem Ende entgegen. Nur noch ein einziges, quadratisches Blatt steht den eifrigen Packhelfern zur Verfügung.



Das muss noch für 15 Geschenke reichen, die allerdings unterschiedlich viel Material verbrauchen und verschiedene Schnitte benötigen.



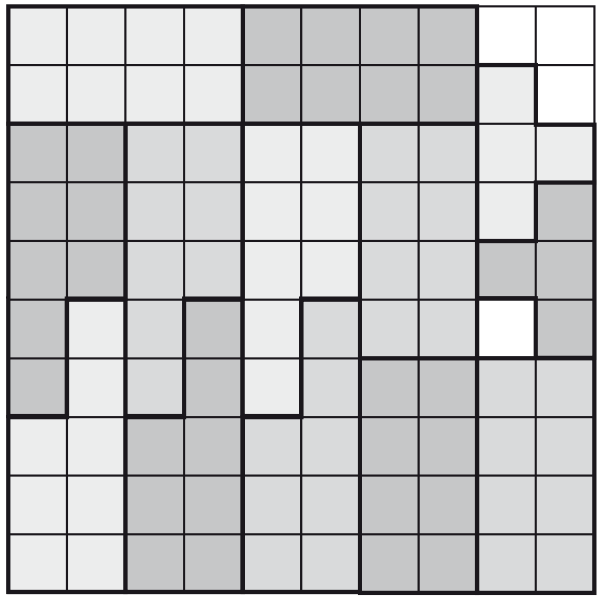
Die Wichtel fangen an zu streiten, wie das Geschenkpapier am besten aufgeteilt werden soll. Schon bald ertönen erste Vermutungen, dass das Papier nicht für alle Geschenke reichen kann. Andere Stimmen sind dagegen ganz anderer Meinung. Einigkeit herrscht nur in einer Sache: Es sollen zumindest so viele Geschenke wie möglich verpackt werden. Aber wie viele Geschenke sind denn nun durch kluges Aufteilen des Papiers höchstens zu verpacken?

Antwortmöglichkeiten:

1. 15
2. 14
3. 13
4. 12
5. 11
6. 10
7. 9
8. 8
9. 7
10. 6

1.2 Lösung

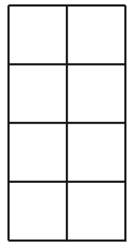
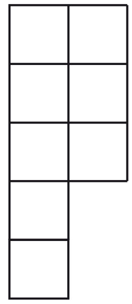
Richtige Lösung: Antwort 3
Eine Lösung für 13 Geschenke ist zum Beispiel durch folgendes Schnittmuster gegeben.



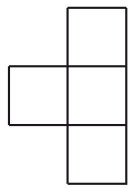
Die Frage ist allerdings, warum die Lösung auch optimal ist, also man nicht noch mehr Geschenke verpacken kann.
1) Es ist nicht möglich, alle Geschenke zu verpacken, da die Fläche des Geschenkpapiers nur aus 100 Kästchen besteht, die 15 Geschenke aber insgesamt 108 Kästchen benötigen würden, da

$$6 \cdot 8 + 6 \cdot 8 + 3 \cdot 4 = 108.$$

2) Nun muss man nur überlegen, ob es nicht doch möglich sein kann, 14 Geschenke zu verpacken. Damit das überhaupt funktionieren kann, ist klar, dass man eines der Geschenke, die 8 Kästchen Verpackungsmaterial benötigen würden, aus dem Spiel lassen muss. Die restlichen Geschenke benötigen dann nämlich nur noch 100 Kästchen Papier: genau so viel, wie die Wichtel noch zur Verfügung haben. Allerdings ist es trotzdem nicht möglich, die verbleibenden Geschenke zu verpacken. Stellt man sich das Papier in einem Schachbrettmuster markiert vor, so gibt es genau gleich viele weiße wie schwarze Felder. Die beiden Schnittmuster

haben diese Eigenschaft auch, es sind immer 4 weiße und 4 schwarze Felder. Bei dem letzten Schnittmuster



sieht das jedoch anders aus. Bei jedem Papierausschnitt wären 3 der 4 Kästchen gleichfarbig. Zudem müssen drei Geschenke mit diesem Muster eingepackt werden. Das bedeutet, dass bei diesen drei Schnittmustern insgesamt nicht gleich viele Felder schwarz wie weiß sein können. Somit kann man 13 Geschenke verpacken.

2 Zocken um Zimt- und Zuckerplätzchen

Autor: Martin Skutella

2.1 Aufgabe

Es war ja nun keineswegs so, dass Rentier Rudolf allen von Weihnachtsmann Willi vorgebrachten Neuerungen prinzipiell ablehnend gegenüberstand. Obgleich er beim Gedanken an Willis – damals unter viel Gestammel hervorgebrachter – Schnapsidee vom Motorschlitten und vorzeitigem Ruhestand nach all den Jahren noch immer eine gewisse Kränkung verspürte. Einzig das zerknirschte Versprechen des Weihnachtsmanns, seine allabendlichen Weihnachtsplätzchen in Zukunft brüderlich mit Rudolf teilen zu wollen, hatte das gefräßige Rentier davon abhalten können, den Job einfach hinzuschmeißen und in die verschneiten Weiten des weihnachtlichen Tannenwaldes davonzulaufen.

Jedenfalls war es den beiden seitdem zu einer lieb gewonnen Gewohnheit geworden, sich die langen Winterabende mit dem Spiel „Schere, Stein, Papier“[1] zu vertreiben. Nach jeder Runde durfte sich der Gewinner eines der knusprigen Zimt- und Zucker-Plätzchen vom immer gut gefüllten Plätzchenteller nehmen. Im Falle eines Unentschiedens teilten sich die beiden ein Plätzchen.
Und dass Rudolf sich mit absichtlich nicht ganz eindeutigen Gesten seiner, zugegeben etwas ungelenken, rechten Vorderhufe einen Vorteil zu verschaffen suchte, war in letzter Zeit fast gar nicht mehr vorgekommen. Schließlich war – bei geschicktem Spiel – für keinen von beiden plätzchenmäßig ein Nachteil zu erwarten. Selbst in Rudolfs vernageltem Rentierschädel war irgendwann die Einsicht gereift, dass es wohl das Beste war, in jeder neuen Runde eine der drei Gesten Schere, Stein und Papier zufällig und gleichberechtigt zu wählen, und zwar ohne dabei das Ergebnis der vorherigen Runden in Betracht zu ziehen.
Als jedoch eines Abends Weihnachtsmann Willi aus heiterem Himmel die Spielregeln um die Geste „Brunnen“ erweiterte, kam es zu einer empfindlichen Störung des häuslichen Friedens. Dass Stein und Schere in den Brunnen fallen können und diesem damit unterlegen sind, das Papier jedoch den Brunnen abdeckt und damit überlegen ist, wollte Rudolf erst nicht so recht einsehen, nahm es aber mürrisch zur Kenntnis. Für ihn als Paarhufer war es jedoch schlechterdings unmöglich, die kreisförmige Brunnengeste zu imitieren. Willi dagegen fand großen Gefallen an der Geste und wollte keinesfalls auf diese Erweiterung verzichten. Andererseits sah er natürlich das mit Rudolfs Ungelenkigkeit einhergehende Plätzchenhandicap.
Schließlich einigten sich beide darauf, Rudolfs Handicap dadurch auszugleichen, dass sich das Rentier alle soundsoviel Runden zusätzliche Plätzchen vom Teller nehmen darf. Natürlich brach sofort der nächste Streit über die korrekte Anzahl von Runden und Plätzchen los, die auch weiterhin eine gerechte Verteilung der Plätzchen gewährleisten würde.
Kannst du den beiden helfen? Nach wie vielen Runden sollte Rudolf sich jeweils zusätzliche Plätzchen nehmen dürfen und wie viele davon, damit auf lange Sicht die Plätzchen weiterhin gerecht zwischen Willi und Rudolf verteilt werden? (Natürlich unter der Annahme, dass beide möglichst geschickt spielen).
Antwortmöglichkeiten:

1. alle 24 Runden ein Plätzchen

[1] Spielregeln, auch für die weiter unten erwähnte Erweiterung, findet man z. B. bei Wikipedia.

2. alle 16 Runden ein Plätzchen
3. alle 12 Runden ein Plätzchen
4. alle 9 Runden ein Plätzchen
5. alle 8 Runden ein Plätzchen
6. alle 6 Runden ein Plätzchen
7. alle 16 Runden drei Plätzchen
8. alle 24 Runden fünf Plätzchen
9. alle 4 Runden ein Plätzchen
10. alle 3 Runden ein Plätzchen

Projektbezug:
Bestmögliche Spielstrategien für Spiele dieses Typs (d. h. optimale Wahrscheinlichkeiten, mit denen ein Spieler die ihm zur Verfügung stehenden Gesten spielen sollte) lassen sich beispielsweise mit Methoden der Linearen Optimierung berechnen, die auch in zahlreichen anderen Gebieten der angewandten Mathematik von herausragender Bedeutung sind. Im Rahmen der MATHEON Projekte B18, B21 und C30 werden beispielsweise optimale Fluchtpläne, Telekommunikationsnetzwerke der Zukunft und Produktionsprozesse für die Automobilindustrie unter anderem mithilfe von solchen Methoden berechnet.

2.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 4
Um zu bestimmen, wie groß Willis Vorteil (und damit Rudolfs Nachteil) aufgrund der ihm zur Verfügung stehenden Brunnengeste ist, müssen wir als Erstes das beschriebene Spiel genau analysieren.
Zunächst einmal stellen wir fest, dass der Stein für Willi wertlos geworden ist, da der Brunnen im Vergleich immer die bessere Wahl darstellt: Spielt nämlich Rudolf Schere oder Papier, erzielen Willis Stein und Brunnen dasselbe Ergebnis; spielt Rudolf jedoch Stein, gewinnt Willi mit dem Brunnen, während sein Stein nur zu einem Unentschieden führt. Daher nehmen wir im Folgenden an, dass Willi niemals Stein spielt und sich folglich auf die drei Gesten Schere, Brunnen und Papier beschränkt.

Damit ergibt sich die folgende Tabelle, in der wir für alle verbliebenen 3x3 Kombinationen von Gesten die Differenz der von Willi und von Rudolf gewonnen Plätzchen eintragen:

Willi \ Rudolf	Schere	Stein	Papier
Schere	0	-1	1
Brunnen	1	1	-1
Papier	-1	1	0

Damit haben wir unser Problem auf ein sogenanntes *Nullsummenspiel* zurückgeführt.
Falls Willi mit Wahrscheinlichkeit $\frac{4}{9}$ Schere, mit Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{9}$ Brunnen und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{9}$ Papier spielt, bekommt er im Erwartungswert $\frac{1}{9}$ Plätzchen mehr als Rudolf – und zwar unabhängig davon, was Rudolf spielt. Um dies zu sehen, genügt es, die drei Zeilen der Tabelle mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten zu multiplizieren und dann zu addieren; die resultierende Zeile enthält drei mal den Wert $\frac{1}{9}$.
Um zu beweisen, dass die beschriebene Strategie für Willi bestmöglich ist, zeigen, wir, dass Rudolf eine Strategie besitzt, mit der er verhindern kann, dass der von Willi im Erwartungswert erzielte Vorteil mehr als $\frac{1}{9}$ Plätzchen beträgt. Dazu spielt Rudolf mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{9}$ Schere, mit Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{9}$ Stein und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{4}{9}$ Papier. Multipliziert man die drei Spalten der Tabelle mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten und addiert sie dann, so erhält man eine Spalte, die drei mal den Wert $\frac{1}{9}$ enthält. Das heißt, egal was Willi spielt, wird Rudolfs erwarteter Nachteil bei dieser Strategie nie größer als $\frac{1}{9}$ Plätzchen sein.
Wir haben herausgefunden, dass Willis Vorteil gegenüber Rudolf pro Runde genau $\frac{1}{9}$ Plätzchen beträgt. Dies sollte dadurch ausgeglichen werden, dass Rudolf alle 9 Runden ein Plätzchen zusätzlich bekommt.

3 Zwölfeck

Autor: Gerhard Woeginger (TU Eindhoven)

3.1 Aufgabe

Der Wichtel Kasimir zeichnet ein regelmäßiges Zwölfeck auf eine Weihnachtskarte. Dann zeichnet er alle Diagonalen des Zwölfecks ein, und da es insgesamt 54 Diagonalen gibt, dauert dies einige Zeit. Dann zählt Kasimir die Schnittpunkte aller 54 Diagonalen im Inneren des Zwölfecks, indem er sie mit dem Finger antippt. Falls drei oder vier oder mehr Diagonalen einander im selben Punkt schneiden, so wird dieser Schnittpunkt von Kasimir natürlich nur einmal angetippt und nur einmal gezählt. Zum Beispiel zählt Kasimir den Mittelpunkt des Zwölfecks als einen einzigen Schnittpunkt (und in diesem Punkt schneiden einander sechs der Diagonalen). Bestimme die Anzahl der inneren Diagonalenschnittpunkte.

Antwortmöglichkeiten:

1. 289 Schnittpunkte
2. 301 Schnittpunkte
3. 307 Schnittpunkte
4. 309 Schnittpunkte
5. 313 Schnittpunkte
6. 314 Schnittpunkte
7. 319 Schnittpunkte
8. 325 Schnittpunkte
9. 331 Schnittpunkte
10. 337 Schnittpunkte

3.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 2
Die Diagonalen eines regelmäßigen Zwölfecks schneiden einander in insgesamt 301 Schnittpunkten im Inneren des Zwölfecks. Wir beschreiben drei mögliche Lösungswege.

1. Lösungsweg: Eine allgemeinere Fragestellung betrifft die Anzahl A_n der Schnittpunkte aller Diagonalen im Inneren eines regelmäßigen n-Ecks. Wir finden schnell heraus, dass $A_3 = 0$ und $A_4 = 1$ und $A_5 = 5$ und $A_6 = 13$ und $A_7 = 35$ gilt. Das ist das Anfangsstück einer Zahlenfolge, und wir können in der berühmten *"On-Line Encyclopedia of Integer Sequences"* von Neil Sloane nach dieser Folge suchen. Wenn wir $\langle 0, 1, 5, 13, 35 \rangle$ in `https://oeis.org/` eintippen, so erhalten wir einen einzigen Treffer:

> A006561.
> Number of intersections of diagonals in the interior of regular n-gon.

Aus der angegeben Zahlenliste lesen wir $A_{12} = 301$ ab, und das Rätsel ist gelöst.

2. Lösungsweg: Eine andere Lösungsmöglichkeit beruht auf einer sehr genauen Zeichnung. Wir nehmen ein Blatt Papier im A3-Format und konstruieren mit dem Zirkel ein riesengrosses regelmäßiges Zwölfeck. (Zuerst konstruieren wir ein regelmäßiges Sechseck, indem wir den Kreisradius sechsmal am Umfang eines riesengrossen Kreises abschlagen. Dann halbieren wir jeden Winkel im Sechseck und erhalten das Zwölfeck.) Dann zeichnen wir alle 54 Diagonalen ein, zählen die Schnittpunkte und erhalten die Antwort 301.
Die Arbeit wird erleichtert, wenn wir das Zwölfeck in 12 kongruente Dreiecke zerschneiden, die jeweils eine Ecke im Mittelpunkt haben. Wir bestimmen die Anzahl x der Schnittpunkte von einem einzigen derartigen Dreieck und erhalten dann $12x + 1$ als Gesamtantwort. Wir müssen dabei beachten, dass die Schnittpunkte auf dem Rand nur einmal gezählt werden, da sich immer 2 Dreiecke einen Rand teilen. Und wir müssen das Zwölfeck natürlich nicht mit der Hand zeichnen, sondern können dazu Computerprogramme verwenden.

3. Lösungsweg: Die dritte Lösung verwendet nur ehrliche Mathematik. Wir benennen die Eckpunkte des Zwölfecks (im Uhrzeigersinn) mit $P_1, P_2, \ldots, P_{12}$, und wir definieren ganze Zahlen n_i mit $2 \leq i \leq 6$ auf die folgende Weise. Im Inneren des Zwölfecks gibt es n_2 Punkte, in denen einander genau zwei Diagonalen schneiden. Weiterhin gibt es n_3, n_4, n_5, n_6 Punkte, in denen einander jeweils genau 3, 4, 5, 6 Diagonalen schneiden. Unser Ziel ist es, den Wert der Summe $S = n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6$ zu ermitteln.

- Man sieht sehr schnell, dass $n_6 = 1$ gilt (da nur im Mittelpunkt 6 Diagonalen auf einander treffen) und dass $n_5 = 0$ gilt.

- Die vier Diagonalen P_1P_5, P_2P_6, P_3P_8 und P_4P_{11} schneiden einander in einem Punkt (dies kann zum Beispiel durch trigonometrische Überlegungen gezeigt werden). Durch die Symmetrien des Zwölfecks erhalten wir 11 weitere Schnittpunkte von vier Diagonalen. Daraus folgern wir $n_4 = 12$.

- Der Schnittpunkt der beiden Diagonalen P_2P_{11} und P_3P_{12} liegt auf der Symmetrieachse P_1P_7 des Zwölfecks (da die Spiegelung der einen Diagonale an der Symmetrieachse genau die andere Diagonale ergibt). Auf analoge Weise sehen wir, dass auch die Schnittpunkte der beiden Diagonalen P_2P_{10} und P_4P_{12}, der beiden Diagonalen P_2P_9 und P_5P_{12} und der beiden Diagonalen P_2P_8 und P_6P_{12} auf dieser Symmetrieachse liegen. Schliesslich schneiden einander die drei Diagonalen P_1P_5, P_2P_{10}, P_3P_{12}

in einem Punkt (und das beweist man wieder mit Trigonometrie). Durch die Symmetrien des Zwölfecks erhalten wir aus diesen 5 Schnittpunkten von drei Diagonalen noch $5 \cdot 11 = 55$ weitere Schnittpunkte. Alles in allem ergibt dies $n_3 = 60$.

- Vier beliebige Eckpunkte des Zwölfecks bestimmen jeweils ein Viereck und den Schnittpunkt der Diagonalen des Vierecks. Das impliziert die Gleichung

  $$n_2 + 3n_3 + 6n_4 + 10n_5 + 15n_6 = \binom{12}{4} = 495.$$

  Aus dieser Gleichung (und aus den uns bereits bekannten Werten n_3, n_4, n_5 und n_6) folgern wir $n_2 = 228$.

Wenn wir alle unsere Beobachtungen zusammenfassen, erhalten wir die Antwort

$$S = n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 = 228 + 60 + 12 + 0 + 1 = 301.$$

Anmerkung:
Im Inneren eines regelmäßigen 18-Ecks gibt es 1837 Schnittpunkte von Diagonalen. Im Inneren eines regelmäßigen 24-Ecks gibt es 7297 Schnittpunkte von Diagonalen.

4 Geschenkeauswahl

Autoren: Dirk Becherer, Martin Büttner

4.1 Aufgabe

Wie jedes Jahr zur Vorweihnachtszeit haben die Wichtel Anton und Bertram nur Blödsinn im Kopf. Eben sind sie in die Geschenkefabrik des Weihnachtsmanns eingebrochen und haben zwei Päckchen mit Geschenkgutscheinen für Schokoladentafeln entwendet. Bezüglich des Aussehens und des Gewichtes unterscheiden sich die beiden Päckchen nicht; Anton und Bertram wissen nur, dass ausschließlich 2-er Potenzen als Gutscheinwert auftreten und für den einen Gutschein doppelt so viele Tafeln einzulösen sind wie für den anderen. Nun sind sie gerade dabei auszuknobeln, wer nun welches Päckchen bekommen soll. Plötzlich schnappt sich Anton ein Geschenk und reißt es auf.

Bertram (verärgert):	Was soll das? Weshalb machst du das erste Päckchen auf?
Anton:	32 Tafeln! Nur 32 Tafeln! Ich habe eine gute Idee ... wenn du unbedingt willst, kannst du den Gutschein haben. Ich nehme lieber das andere Päckchen.
Bertram (trotzig):	Das könnte dir so passen. Weshalb willst du jetzt auch noch tauschen?
Anton:	Wenn du dir das genau überlegst, dann bekomme ich im Durchschnitt mehr. Angenommen ich hätte einen Gutschein für eine Tafel gefunden, dann wären im zweiten Päckchen genau zwei Tafeln gewesen. In dem Fall, dass ich x Tafeln für x verschieden von 1 gezogen hätte, bekäme ich durch das Tauschen entweder $x/2$ oder $2x$ Tafeln und zwar jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von 1/2. Das macht im Schnitt $1/2 \cdot 2x + 1/2 \cdot x/2 = 5/4 \cdot x$ Tafeln; also 25 Prozent mehr.
Bertram:	Was erzählst du da wieder für einen Unfug. Du machst da einen gravierenden Denkfehler...

Frage 1: Wer hat hier Recht? Anton oder Bertram?

In der Zwischenzeit hat Conrad das ganze Treiben mitbekommen und sagt:

Conrad:	Zufälligerweise habe ich mitbekommen, nach welchem raffinerten Mechanismus der Inhalt solcher Päckchenpaare jedesmal festgelegt wird. Der Osterhase würfelt solange mit einem fairen Würfel bis zum ersten Mal eine Sechs erscheint. Wird dabei x-mal keine Sechs gewürfelt, so kommt in das eine Päckchen ein Wertgutschein über 2^x Tafeln und in das andere Päckchen der Gutschein über 2^{x+1} Tafeln.
Anton, Bertram (gemeinsam):	Das ändert doch nun wirklich nichts an der Betrachtungsweise.
Conrad:	Da seid euch mal nicht zu sicher!

Frage 2: In welcher Spanne liegt, mit der Zusatzinformation von Conrad, der Erwartungswert für die Menge an Schokolade des anderen Päckchens, wenn

man das erste Päckchen mit einem Gutschein über 32 Schokoladentafeln geöffnet hat?

Antwortmöglichkeiten für die Fragen 1 und 2:

1. Anton/ 22-26 Tafeln
2. Bertram/ 22-26 Tafeln
3. Anton/ 26-30 Tafeln
4. Bertram/ 26-30 Tafeln
5. Anton/ 30-34 Tafeln
6. Bertram/ 30-34 Tafeln
7. Anton/ 34-38 Tafeln
8. Bertram/ 34-38 Tafeln
9. Anton/ 38-42 Tafeln
10. Bertram/ 38-42 Tafeln

Projektbezug:
Die Intuition kann beim Einschätzen von zufälligen Phänomenen in die Irre führen. Bei Anwendungen, z.B. in der Finanzmathematik kann das "teuer werden". Die Wahrscheinlichkeitstheorie liefert einen mathematischen Rahmen, in dem Annahmen und Folgerungen präzise formuliert und diskutiert werden können. Im Allgemeinen hängen Schlußfolgerungen natürlich von den zugrunde gelegten Annahmen ab. Im Beispiel der Aufgabe ändern sich durch eine zusätzliche Information die (bedingten) Wahrscheinlichkeiten und damit der erwartete Gewinn und Verlust.

4.2 Lösung

textbfAntwort 8 (Bertram/ 34-38 Tafeln) ist richtig.
zu Frage 1**:** Dieses Problem ist auch unter dem Namen „Umtauschparadoxon“ oder auch „Briefumschlagparadoxon“ bekannt. Der gesunde Menschenverstand sagt natürlich, dass Anton einen Denkfehler gemacht hat. Nach Antons Argumentation lohnt sich tauschen immer, sodass er schon im Vorfeld ohne Öffnen

das andere Paket auswählen kann und damit mehr Schokolade erwarten kann. Das ergibt aber einen Widerspruch, da er dann beliebig häufig zwischen den Päckchen wechseln würde und immer mehr Tafeln im Schnitt. Wo liegt dann aber der Denkfehler bei Anton?
Sei Y/Z die Anzahl der Schokoladentafeln des als erstes/zweites geöffneten Päckchen, X die Tafelanzahl des Paketes mit der wenigeren Schokolade und $p_n := \mathbb{P}(X = 2^n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Antons Argumentation gilt:

$$P(Z = 2^{n+1}|Y = 2^n) = P(Z = 2^{n-1}|Y = 2^n) = \frac{1}{2} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}^{>0}.$$

Daraus kann man schlussfolgern, dass schlussfolgern, dass X gleichverteilt ist, was einen Widerspruch zu $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$ ergibt.
Genauer: Habe nun das zuerst geöffnete Päckchen 2^n Schokotafeln, dann gilt für die Wahrscheinlichkeit, dass Anton im anderen Paket mehr Schokolade findet:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z = 2^{n+1}|Y = 2^n) &= \mathbb{P}(X = 2^n|Y = 2^n) = \frac{\mathbb{P}(X = 2^n, Y = 2^n)}{\mathbb{P}(Y = 2^n)} \\ &= \frac{1/2\mathbb{P}(X = 2^n)}{1/2\mathbb{P}(X = 2^n) + 1/2\mathbb{P}(X = 2^{n-1})} = \frac{p_n}{p_n + p_{n-1}},\end{aligned}$$

für $n > 0$ und $P(Z = 2|Y = 1) = 1$.
Für die entsprechende Wahrscheinlichkeit, dass sich weniger Schokolade im zweiten Päckchen befindet, gilt:

$$\mathbb{P}(Z = 2^{n-1}|Y = 2^n) = 1 - \mathbb{P}(Z = 2^{n+1}|Y = 2^n) = \frac{p_{n-1}}{p_n + p_{n-1}},$$

für $n > 0$. Unter Anton's Annahme gilt dann aber $p_n/(p_n + p_{n-1}) = 1/2$ für alle $n > 0$, was dann $p_n \equiv const.$ impliziert.

zu Frage 2: Es gilt für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 2^k) &= \mathbb{P}(\text{„im } (k+1)\text{-Wurf wird zum ersten Mal eine Sechs geworfen“ }) \\ &= \left(\frac{5}{6}\right)^k \frac{1}{6},\end{aligned}$$

d.h. X ist geometrisch mit Parameter 1/6 auf der Menge $\{1, 2, 4, \ldots\}$ verteilt.
Für die bedingte Erwartung von Z gegeben den Wert von Y gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z|Y=2^n) &= 2^{n+1}\mathbb{P}(Z=2^{n+1}|Y=2^n) + 2^{n-1}\mathbb{P}(Z=2^{n-1}|Y=2^n) \\
&= 2^{n+1}\frac{p_n}{p_n+p_{n-1}} + 2^{n-1}\frac{p_{n-1}}{p_n+p_{n-1}} \\
&= 2^{n+1}\frac{5/6}{5/6+1} + 2^{n-1}\frac{1}{5/6+1} \\
&= 2^{n+1}\frac{5}{11} + 2^{n-1}\frac{6}{11} = \frac{13}{11}2^n
\end{aligned}$$

für $n > 0$ und $\mathbb{E}(Z|Y=1) = 2$.
Wenn also das erste Paket 32 Tafeln hat, so befinden sich im zweiten Päckchen im Durchschnitt

$$13/11 \cdot 2^5 \approx 37,82$$

Schokoladentafeln; also fast 6 Tafeln mehr, als wenn man nicht tauschen würde.

5 Gesprächige Wichtel

Autorin: Marika Karbstein

5.1 Aufgabe

Es sollte eine tolle Überraschung werden. In den letzten Jahren hat es die viele Arbeit immer nicht zugelassen. Aber dieses Jahr will der Osterhase seinen guten Freund, den Weihnachtsmann, am Weihnachtsabend besuchen und freut sich schon sehr auf das überraschte Gesicht von ihm. Doch irgendwie haben drei Wichtel, Franz, Rita und Ole, von dem geplanten Besuch erfahren. Leider können sie nichts für sich behalten. Sobald sich Wichtel treffen, reden sie über alles, was sie gehört haben. Selbst, wenn der Weihnachtsmann dabei ist, werden alle Informationen ausgetauscht. Bei folgenden Aktivitäten treffen Wichtel bzw. Wichtel und Weihnachtsmann aufeinander.

- Franz und Hella treffen sich bei einer heißen Schokolade.

- Ole, Hella und Emil gehen zusammen schwimmen.
- Emil und Theo treffen sich in der Sauna.
- Theo und Erika diskutieren gerne bei einem Glas Wein.
- Ina, Harry und Nelly spielen zusammen Skat.
- Rita und Harry treffen sich beim Tischtennis.
- Erika, Nelly, Alfons und Caro spielen zusammen Poker.
- Theo, Hanna und der Weihnachtsmann gehen zusammen rodeln.
- Ina, Caro und der Weihnachtsmann spielen zusammen Basketball.
- Alfons und der Weihnachtsmann fahren zusammen Ski.

Welche Aktivitäten müssten bis zum Weihnachtsabend ausfallen, damit der Weihnachtsmann ganz sicher nichts vom geplanten Besuch erfährt?

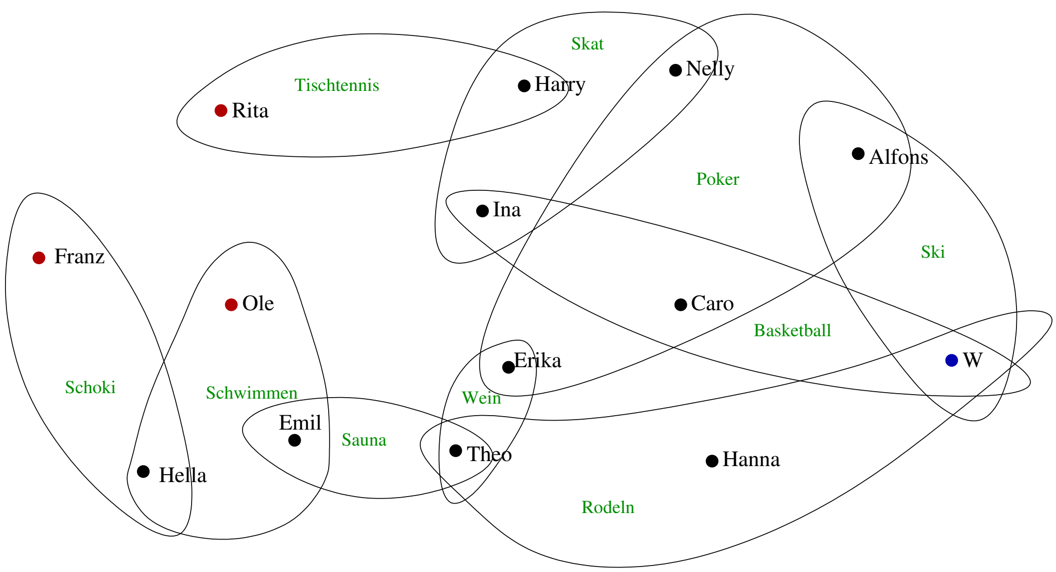
Antwortmöglichkeiten:

1. Schokolade trinken und Schwimmen
2. Wein trinken und Tischtennis
3. Poker und Rodeln
4. Skat und Sauna
5. Skat und Poker
6. Basketball und Ski
7. Tischtennis und Rodeln
8. Sauna und Basketball
9. Ski und Schwimmen
10. Wein trinken und Schokolade trinken

Projektbezug:
Einige Projekte des Matheon beschäftigen sich mit Netzen. Das oben beschriebene Kommunikationsnetz ist ähnlich zu Liniennetzen, die im Projekt B15 untersucht werden.

5.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 4
Eine Darstellung der Wichtel und ihre Teilnahme an den verschiedenen Aktivitäten ist die folgende:



Der Weihnachtsmann hört von dem Besuch, wenn es eine Kette von sich schneidenden Aktivitäten/Flächen gibt, die den Weihnachtsmann (W, blauer Punkt) und mindestens einen der drei Wichtel Franz, Rita, Ole (rote Punkte) enthält.
Man sieht sofort, dass bei Ausfallen von Skat und Sauna (Antwort 4) keine solche Kette mehr existiert. Nun kann man sich noch vergewissern, dass bei allen anderen Antwortmöglichkeit immer wenigstens eine Kette bestehen bleibt.

6 Frust ablassen

Autor: Falk Ebert

6.1 Aufgabe

Jugendherbergswichtel Joni ist frustriert.
„Ein Hotel - in Spitzbergen! Wie bescheuert ist das denn? Und noch dazu für - wie hat er es gesagt … Individualtouristen.“
„‚Pass auf!‘ hat er gesagt. ‚Ich hab da dieses alte Bürogebäude günstig gekauft - quasi ge*schenkt* - Hohoho! Da sind langweilige Büroräume drin und daraus machen wir Zimmer. Hohoho!‘“
„Oh, wie ich dieses Lachen hasse. Seit der Weihnachtsmann wegen des Grinchs im letzten Jahr bei einem Therapeuten war, hat er ständig neue idiotische Ideen und ständig dieses Lachen...“

„Der hat doch eine echte Schneemeise. Aber gut, er soll sein Hotel haben. Aus den 25 winzigen quadratischen Büroräumen (Abbildung 1) machen wir ein Hotel, wie es noch keiner gesehen hat. Wir reißen ein paar Wände ein und bekommen viele Zimmer. Und für die Individualisten werden es auch Zimmer sein, bei denen kein Grundriss zu einem anderen deckungsgleich ist.“
„Wie die Leute in die Zimmer reinkommen? Keine Ahnung. Von Korridoren war keine Rede. Die armen Insassen der Büros hatten ja auch keine Zugänge. Sollen sich doch die Individualtouristen individuell überlegen, wie sie reinkommen.“
„Möglichst viele Zimmer sollten es sein. Ich habe keine Ahnung, wie viele es werden können. Wie viele Individualistenzimmer bekommen wir denn bestenfalls hier unter?“

Antwortmöglichkeiten:

1. 3
2. 4
3. 5
4. 6
5. 7
6. 8
7. 9
8. 25
9. 42
10. Man kann beliebig viele Zimmer in dem Hotel unterbringen.

Anmerkungen:

- „*Deckungsgleich* heißt auch *kongruent*. Schlagt es nach, bevor Ihr fragt, ob Grundrisse auch gespiegelt werden können und dann unterschiedlich sind.“

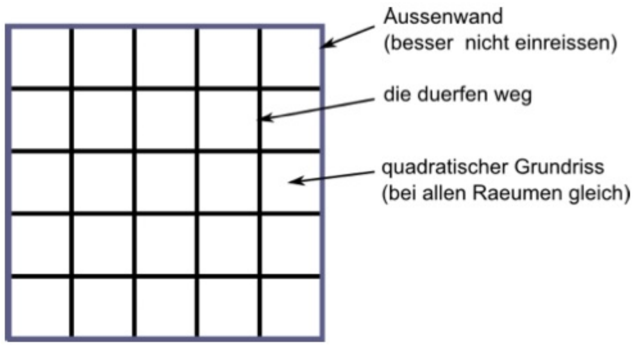


Abbildung 1: der Grundriss des Bürogebäudes

- „Ja, es dürfen nur Wände eingerissen werden, keine neu gebaut. Und wenn, dann wird eine Trennwand zwischen zwei benachbarten Zimmern gleich komplett eingerissen. “
- „Und Wände, die einfach so im Raum stehen, gibt es auch nicht. Wand heißt Außenbegrenzung, nicht Raumteiler. Antechambres gibt's nicht!“
- „Ich weiß selbst, dass die Idee bescheuert ist. Aber versuch' Du mal, ihm das zu erklären.“

Projektbezug:
Diese Aufgabe ist ein Problem aus der kombinatorischen Optimierung. Dieses Fachgebiet wird im MATHEON in vielen Projekten genutzt und auch weiterentwickelt. Ein typischer Aspekt von Problemen der kombinatorischen Optimierung ist, dass man *im Prinzip* alle Möglichkeiten ausprobieren könnte. Im vorliegenden Fall sind das aber 2^{40} also rund eine Billion Möglichkeiten, Wände einzureißen oder stehenzulassen. Und jede einzelne zu prüfen, wird wahrscheinlich länger dauern, als der Kalender freigeschalten ist. Ohne alternative Zugänge wird man nicht rechtzeitig fertig.

6.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 6 (8 Zimmer)
Die ganzen Erklärungen rund um die Zimmerform sagen nichts anderes aus, als dass es darum geht, das 5×5-Raster des Hotels mit kleinen, zusammenhängenden, aus Quadraten gebildeten Flächen zu füllen. Wer irgendwann einmal TETRIS gespielt hat, wird sich in dem Hotel wohlfühlen.

Wäre da nicht diese komische Einschränkung mit den nicht kongruenten Zimmern, dann wäre die Lösung ganz einfach. Nichts wird eingerissen; 25 identische Zimmer. Mehr ist nicht drin. Leider ist es nicht so einfach, denn dann wären auch alle Grundrisse kongruent (weil identisch). Führen wir als Einheit mal das *Kästchen* als die Fläche eines ursprünglichen Büroraums ein, dann fallen mehrere Dinge auf:

- Alle Zimmer haben eine Fläche von einer natürlichen Anzahl von Kästchen.
- Je geringer die Kästchenzahl pro Zimmer, desto mehr Zimmer kriegt man im Hotel unter.

Also versuchen wir mal möglichst viele Zimmergrundrisse aus möglichst wenigen Kästchen zusammenzusetzen. Die folgende Tabelle (Abbildung 2) listet alle Formen, die aus bis zu 4 Kästchen machbar sind auf.

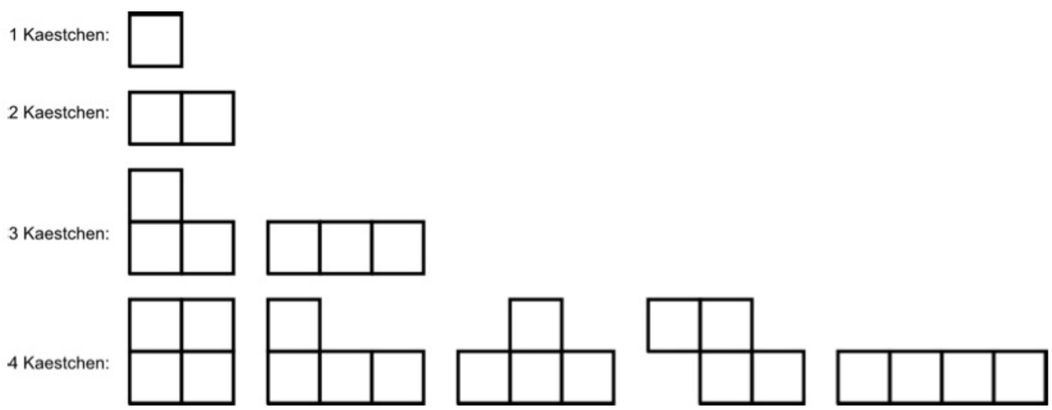


Abbildung 2: Mögliche Formen aus maximal 4 Kästchen

Dem erfahrenen TETRIS Spieler kommt vor allem die unterste Reihe bekannt vor. Aber fehlen da nicht irgendwelche Formen? Nein! Denn die ergeben sich durch Spiegelung aus den anderen Formen und Spiegelungen zählen zu den Kongruenzabbildungen.

Wir zählen nach und stellen fest, mit maximal einem Kästchen lässt sich nur ein Zimmer gestalten, also eine Fläche von 1. Mit maximal 2 Kästchen kommt nur eine Form dazu. Insgesamt kommen wir auf eine Fläche von 3. Mit maximal 3 Kästchen kommen 2 Formen dazu. Insgesamt ist das jetzt eine Fläche

von 9 Kästchen. Mit den fünf Formen zu je 4 Kästchen kommt eine abdeckbare Fläche von 20 Kästchen dazu. Insgesamt sind wir bei 29 Kästchen. Das sollte reichen. Wir müssen nicht mal alle möglichen 4er-Formen verwenden. Wenn wir es schaffen, aus allen Formen mit maximal 3 Kästchen und vier der 4er-Formen, dann ist die Aufgabe gelöst. Mehr Zimmer sind nicht machbar, weil sonst mehr Zimmer aus weniger Kästchen benötigt werden und das ist aufgrund der Forderung nach nicht kongruenten Grundrissen nicht machbar.
Eine mögliche Lösung ist in Abbildung 3 gegeben. Diese Variante hat sogar noch den Bonus, dass jedes Zimmer mit der Außenwand Kontakt hat und das leidige Problem des Zugangs gelöst ist.

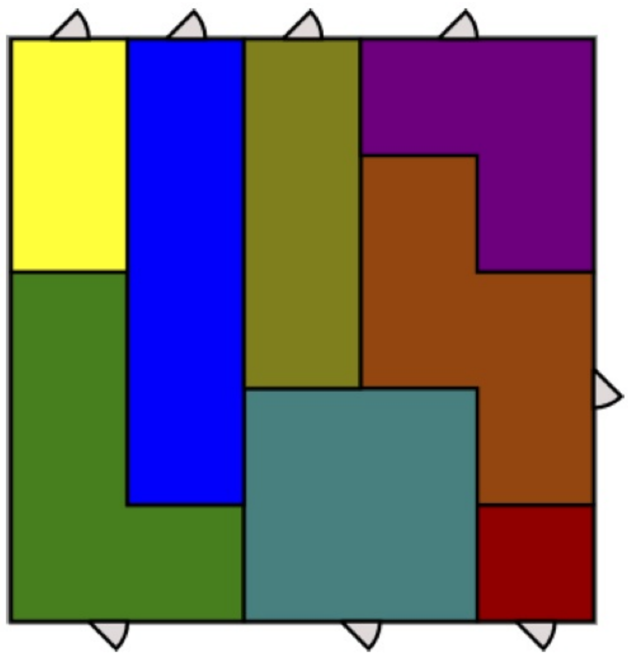


Abbildung 3: Mögliche Zimmeraufteilung

7 Digitale Weihnachten

Autoren: Gitta Kutyniok, Wang-Q Lim

7.1 Aufgabe

Der Weihnachtsmann hatte sich im letzten Jahr überlegt, musikbegeisterten Kindern zusätzlich zu den üblichen Geschenken noch einige besonders schöne Songs – einige davon hatte er sogar selbst gesungen – zu schenken. Um nicht veraltet zu wirken und mit der Zeit zu gehen, hatte er sich extra einen Computer gekauft und dann die Songs digital per Email verschickt. Da er aber noch sehr unerfahren war, hatte er die Songs nicht vorher komprimiert. Einige Monate später war er schockiert, als er erfuhr, dass sich die meisten Kinder nicht sehr gefreut hatten, sondern eher ärgerlich waren, dass die Quota ihres Email-Accounts gesprengt worden war. Der traurige Weihnachtsmann berichtete einigen seiner Wichtelfreunde von diesem Malheur. Ein Wichtel kam dann einige Tage später mit einem Zettel zu ihm, auf den er eine Methode zur Kompression geschrieben hatte, die er bei einem seiner Streifzüge auf der Erde aufgeschnappt hatte. Der Zettel sah folgendermaßen aus:

Schritte zur Kompression von Weihnachtsliedern:

1) *Das Lied wird an einer endlichen Anzahl bestimmter Zeitpunkte gemessen. Dies ergibt reelle Zahlen* $x_1, \ldots, x_n$. *Es muss unbedingt* $n = 2^m$ *für eine natürliche Zahl* m *gelten.*

2) *Nehme nun von je zwei aufeinanderfolgenden Zahlen die Summe und multipliziere diese mit* $\frac{1}{\sqrt{2}}$; *berechne also* $a_k^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_{2k-1} + x_{2k})$, $k = 1, \ldots, 2^{m-1}$.

3) *Nehme auch die Differenz von je zwei aufeinanderfolgenden Zahlen multipliziert mit* $\frac{1}{\sqrt{2}}$; *berechne also* $b_k^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_{2k-1} - x_{2k})$, $k = 1, \ldots, 2^{m-1}$.

4) *Die Schritte 2) und 3) liefern* 2^{m-1} *reelle Zahlen* $a_1^{(1)}, \ldots, a_{2^{m-1}}^{(1)}$, *sowie* 2^{m-1} *reelle Zahlen* $b_1^{(1)}, \ldots, b_{2^{m-1}}^{(1)}$. *Wende nun auf* $a_1^{(1)}, \ldots, a_{2^{m-1}}^{(1)}$ *wieder das gleiche Verfahren wie in Schritt 2) und 3) an, d.h. berechne nun die* 2^{m-2} *reellen Zahlen* $a_k^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{2k-1}^{(1)} + a_{2k}^{(1)})$, $k = 1, \ldots, 2^{m-2}$ *und die* 2^{m-2} *reellen Zahlen* $b_k^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{2k-1}^{(1)} - a_{2k}^{(1)})$, $k = 1, \ldots, 2^{m-2}$.

5) *Nimm nun* $a_1^{(2)}, \ldots, a_{2^{m-2}}^{(2)}$ *und wende wieder das gleiche Verfahren wie in Schritt 2) und 3) an. Iteriere dies so oft, bis du nur noch eine reelle Zahl* $a_1^{(m)}$ *und eine reelle Zahl* $b_1^{(m)}$ *erhältst.*

6) *Zum Schluss erhältst Du den Vektor*

$$(a_1^{(m)}, b_1^{(m)}, b_1^{(m-1)}, b_2^{(m-1)}, \ldots, b_1^{(1)}, b_2^{(1)}, \ldots, b_{2^{m-1}}^{(1)}).$$

7) *Da Weihnachtslieder keine großen Sprünge haben, sollten die meisten dieser Zahlen klein sein; diese kann man dann getrost gleich Null setzen. Ich würde dir empfehlen alle diejenigen, die betragsmäßig kleiner oder gleich* $\frac{3}{10}$ *sind, auf Null zu setzen. Der Trick ist, dass hierdurch nur diejenigen Zahlen ungleich Null gespeichert werden müssen. Dies liefert eine sehr gute Kompression.*

Da der Wichtel hilfreich sein wollte, hat er dem Weihnachtsmann noch ein Beispiel auf die Rückseite des Zettels geschrieben:

Ein Beispiel zur Hilfe:
Für $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = \frac{6}{5}$, $x_4 = \frac{6}{5}$ *ergibt sich zunächst* $m = 2$. *Schritt 2) liefert dann* $a_1^{(1)} = \sqrt{2}$ *and* $a_2^{(1)} = \frac{6}{5} \cdot \sqrt{2}$, *und Schritt 3) führt auf* $b_1^{(1)} = 0$ *and* $b_2^{(1)} = 0$. *In Schritt 4) und Schritt 5) werden* $a_1^{(2)} = \frac{11}{5}$ *und* $b_1^{(2)} = -\frac{1}{5}$ *berechnet. Schritt 6) liefert dann*

$$(a_1^{(2)}, b_1^{(2)}, b_1^{(1)}, b_2^{(1)}) = (\frac{11}{5}, -\frac{1}{5}, 0, 0),$$

und die Kompression in Schritt 7) ergibt

$$(\frac{11}{5}, 0, 0, 0).$$

Man muss also nur $\frac{11}{5}$ *speichern!*

Der Weihnachtsmann hat nach einigem Nachdenken das Prinzip verstanden. Er ist dann aber doch etwas verwundert, und fragt den Wichtel, wie sich das Lied denn daraus wiederherstellen lässt und ob es sich durch die Kompression völlig anders anhören würde. Der Wichtel ist sich nicht ganz sicher wie die Rekonstruktion verläuft, versichert dem Weihnachtsmann aber, dass die Menschen dieses Kompressionsprinzip ständig verwenden. Somit sollte sich das Ergebnis kaum von dem Originallied unterscheiden. Er verrät dem Weihnachtsmann noch, dass die Menschen den Fehler zwischen den abgetasteten Werten des Originalliedes $x_1, \ldots, x_n$ und denen des rekonstruierten Liedes $y_1, \ldots, y_n$ mittels

$$E = \frac{1}{n}\left((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2\right)$$

berechnen.
Der Weihnachtsmann möchte dieses Verfahren zunächst selbst testen, bevor er zum kommenden Weihnachtsfest die Lieder komprimiert versendet – diesmal möchte er sich nicht wieder blamieren. Er nimmt hierzu den ersten Teil eines seiner selbstgesungenen Lieder. Dies liefert ihm reelle Zahlen $x_1, \ldots, x_8$, auf die er den neu erlernten Kompressionsalgorithmus, aber nur bis einschließlich

Schritt 6) anwendet. Er erhält hiermit den Vektor

$$\left(\frac{5}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{2}, \frac{3}{10}, 0, 0, 0, 0\right).$$

Er möchte nun erstens testen, ob und wie er das Originallied hieraus rekonstruieren kann, und zweitens, welchen Fehler die Kompression liefert. Hilf dem Weihnachtsmann zunächst die Werte $x_1, \ldots, x_8$ aus dem eben genannten Vektor zu rekonstruieren. Anschließend sollte der Vektor mittels Schritt 7) des Kompressionsalsgorithmus komprimiert werden, und hierauf das entwickelte Rekonstruktionsverfahren angewandt werden. Dies liefert eine Näherung an $x_1, \ldots, x_8$, die wir mit $y_1, \ldots, y_8$ bezeichnen. Welcher Wert ergibt sich für den Fehler E?
Antwortmöglichkeiten: Der Fehler ist

1. $E = \frac{9}{800}$.
2. $E = \frac{1}{80}$.
3. $E = \frac{1}{100}$.
4. $E = \frac{1}{60}$.
5. $E = \frac{7}{900}$.
6. $E = \frac{1}{13}$.
7. $E = \frac{5}{27}$.
8. $E = \frac{7}{35}$.
9. $E = \frac{5}{237}$.
10. $E = \frac{2}{161}$.

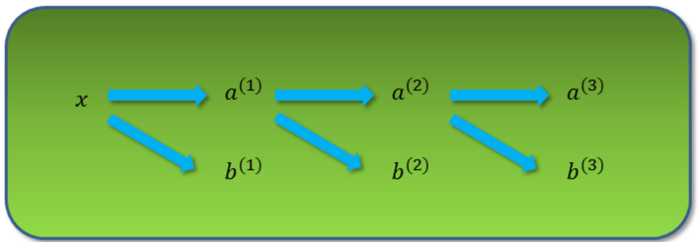
Projektbezug:
Das Teilgebiet der Angewandten Harmonischen Analysis beschäftigt sich unter anderem mit dem Entwickeln effizienter mathematischer Methodiken zur Analyse von Daten, wie z.B. Bilddaten, und zugehöriger Fehlerbetrachtungen. Der in der Aufgabe vorgestellte Kompressionsalgorithmus ist ein Spezialfall der Kompression mittels sogenannter Wavelets – Funktionen, die wie kleine "Wellchen" aussehen. Eine Verallgemeinerung hiervon für 2-dimensionale Bilddaten ist Grundlage des bekannten Kompressionsalgorithmus JPEG2000.

7.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 1 Es gilt $m = 3$ und der Vektor, der sich aus den Schritten 1)-6) ergibt hat die Form

$$(a_1^{(3)}, b_1^{(3)}, b_1^{(2)}, b_2^{(2)}, b_1^{(1)}, b_2^{(1)}, b_3^{(1)}, b_4^{(1)}) = \left(\frac{5}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{2}, \frac{3}{10}, 0, 0, 0, 0\right).$$

Schritt 1)-6) kann folgendermaßen visualisiert werden:



Für die Rekonstruktion der Abtastwerte des Originalliedes $x_1, \ldots, x_8$, müssen wir den vorgestellten Ablauf quasi rückwärts gehen. Wir berechnen nun zuerst $a_1^{(2)}, a_2^{(2)}$ aus $a_1^{(3)}$ und $b_1^{(3)}$. Laut Algorithmus gilt

$$\begin{aligned} a_1^{(3)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1^{(2)} + a_2^{(2)}), \\ b_1^{(3)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1^{(2)} - a_2^{(2)}). \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich somit

$$\begin{aligned} a_1^{(2)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1^{(3)} + b_1^{(3)}) = \frac{5}{2}, \\ a_2^{(2)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1^{(3)} - b_1^{(3)}) = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Der nächste Schritt besteht darin $a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, a_3^{(1)}, a_4^{(1)}$ aus $a_1^{(2)}, a_2^{(2)}$ und $b_1^{(2)}, b_2^{(2)}$ zu berechnen. Laut Algorithmus gilt

$$\begin{aligned} a_1^{(2)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1^{(1)} + a_2^{(1)}), \\ b_1^{(2)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1^{(1)} - a_2^{(1)}), \\ a_2^{(2)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_3^{(1)} + a_4^{(1)}), \\ b_2^{(2)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_3^{(1)} - a_4^{(1)}). \end{aligned}$$

Folglich können wir $a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, a_3^{(1)}, a_4^{(1)}$ folgendermaßen berechnen:

$$\begin{aligned} a_1^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1^{(2)} + b_1^{(2)}) = \sqrt{2}, \\ a_2^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1^{(2)} - b_1^{(2)}) = \frac{3}{\sqrt{2}}, \\ a_3^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_2^{(2)} + b_2^{(2)}) = \frac{14}{5\sqrt{2}}, \\ a_4^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_2^{(2)} - b_2^{(2)}) = \frac{11}{5\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Der letzte Schritt ist $x_1, \dots, x_8$ aus $a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, a_3^{(1)}, a_4^{(1)}$ und $b_1^{(1)}, b_2^{(1)}, b_3^{(1)}, b_4^{(1)}$ zu berechnen. Wir verwenden wieder genauso wie oben, dass

$$\begin{aligned} a_1^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2), \\ b_1^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2), \\ a_2^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x_3 + x_4), \\ b_2^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x_3 - x_4), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
a_3^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x_5 + x_6), \\
b_3^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x_5 - x_6), \\
a_4^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x_7 + x_8), \\
b_4^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x_7 - x_8).
\end{aligned}
$$

Wir können nun die Abtastwerte des Originalliedes $x_1, \ldots, x_8$ folgendermaßen berechnen:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1^{(1)} + b_1^{(1)}) = 1, \\
x_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1^{(1)} - b_1^{(1)}) = 1, \\
x_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_2^{(1)} + b_2^{(1)}) = \frac{3}{2}, \\
x_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_2^{(1)} - b_2^{(1)}) = \frac{3}{2}, \\
x_5 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_3^{(1)} + b_3^{(1)}) = \frac{7}{5}, \\
x_6 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_3^{(1)} - b_3^{(1)}) = \frac{7}{5}, \\
x_7 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_4^{(1)} + b_4^{(1)}) = \frac{11}{10}, \\
x_8 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_4^{(1)} - b_4^{(1)}) = \frac{11}{10}.
\end{aligned}
$$

Wenden wir nun Schritt 7) auf den Vektor

$$\left(\frac{5}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{2}, \frac{3}{10}, 0, 0, 0, 0\right),$$

an, so ergibt sich die komprimierte Version

$$\left(\frac{5}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0, 0\right).$$

Wir wenden nun den gleichen Rekonstruktionsalgorithmus wie oben vorgestellt an, und erhalten

$$(y_1, \dots, y_8) = (1, 1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{4}, \frac{5}{4}, \frac{5}{4}).$$

Der Rekonstruktionsfehler ergibt sich nun mittels

$$E = \frac{1}{8}\left((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_8 - y_8)^2\right) = \frac{9}{800}.$$

8 Schneemann

Autoren: Robert Bartz, Grit Luckmann, Sabiene Zänker

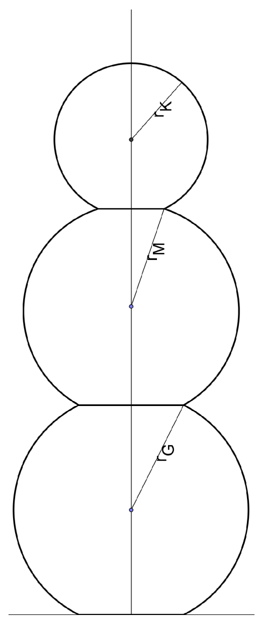
8.1 Aufgabe

In der Welt des Weihnachtsmanns und seiner fleißigen Helfer, der Wichtel, ist täglich frischer Schnee schon fast selbstverständlich. Nach getaner Arbeit vergnügen sich einige von ihnen beim Rodeln, andere wiederum fahren Ski, wieder andere sitzen am Kamin und knabbern Nüsse, lesen oder beschäftigen sich anderswie. Einige der kleinen Gesellen bauen jedes Jahr wunderschöne Schneeskulpturen. Ihr erstes Bauwerk in diesem Jahr war ein Schneemann. Mit dieser Skulptur forderten sie auch diejenigen heraus, die am Kaminfeuer saßen. Sie haben nämlich herausgefunden, dass sich die Volumina der drei großen „Schneebälle" (als Kugeln angenommen) vor dem Zusammenbau wie

1 zu 2 zu 3 verhalten. Darüber hinaus hat die untere Kugel einen größten Umfang von ca. 24 dm. Das Zusammenbauen der Schneemannskulptur war gar nicht so einfach. Doch die Wichtel haben auch das geschafft. Dort, wo zwei Kugeln aufeinandertreffen bzw. die große Kugel auf dem Boden steht, werden die Kugeln auf jeder Seite eben abgeplattet, so dass sie eine gemeinsame Berührfläche in Form eines Kreises besitzen. Wir nehmen an, dass durch die Abplattung

1. vom Durchmesser der großen Kugel in vertikaler Richtung oben und unten jeweils 5 % verloren gehen und
2. vom Radius der mittleren Kugel in vertikaler Richtung oben 5 % verloren gehen.

Nun sollen die Knobler unter ihnen herausfinden, wie hoch der Schneemann geworden ist. Das Nachmessen ergab eine Genauigkeit, die sich sehen lassen konnte. Wie hoch ist der Schneemann geworden?



Der Schneemann hat eine ungefähre Höhe von:
(Hinweis: Es wird die Lösung genommen, die dem errechneten Wert am nächsten ist.)

Antwortmöglichkeiten:

1. 150 cm
2. 155 cm
3. 160 cm
4. 165 cm
5. 170 cm
6. 175 cm
7. 180 cm
8. 185 cm
9. 190 cm
10. 195 cm

8.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 7.
Die Gesamthöhe des Schneemanns lässt sich wie folgt berechnen:

$$h = \underbrace{0.9 \cdot 2 \cdot r_G}_{\text{große Kugel}} + \underbrace{r_M^\star + 0.95 \cdot r_M}_{\text{mittlere Kugel}} + \underbrace{r_K^\star + r_K}_{\text{kleine Kugel}}, \tag{1}$$

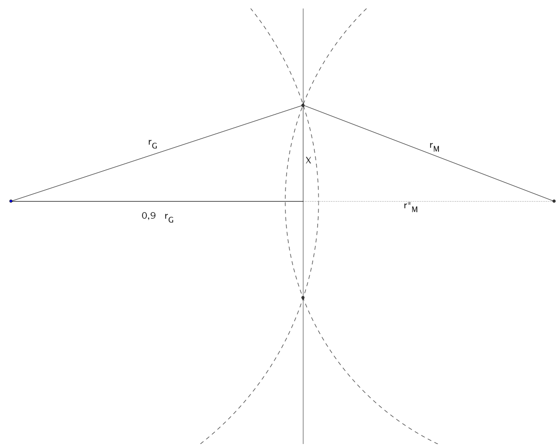
wobei sich die Radien $r_M^\star$ und $r_K^\star$ aus der Bedingung für die gemeinsamen Schnittkreise der Berührflächen der Kugeln ergeben. Für die Durchmesser bzw. Radien(in dm) der einzelnen Kugeln gilt:

- für die große Kugel:

$$24 = u_G = 2 \cdot r_G \cdot \pi \Leftrightarrow r_G = \frac{12}{\pi} \text{ und}$$

- für die mittlere bzw. kleine Kugel folgt aus dem Verhältnis der Volumina:

$$r_M = \frac{12}{\pi} \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \text{ bzw. } r_K = \frac{12}{\pi} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{3}}.$$



Die Abstände an den Berührflächen berechnet man mit Hilfe des Satzes des Pythagoras, hier ausführlich für die Berührfläche zwischen der großen und der mittleren Kugel dargestellt (vgl. Abbildung).

$$\begin{aligned} r_M^\star &= \sqrt{r_M^2 - x^2} = \sqrt{r_M^2 - (r_G^2 - (0,9 \cdot r_G)^2)} \\ &= \sqrt{\left(r_G \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right)^2 - (r_G^2 - (0,9 \cdot r_G)^2)} \\ &= r_G \cdot \sqrt{\left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right)^2 - \frac{19}{100}} \end{aligned}$$

Analog erhalten wir für $r_K^\star$:

$$r_K^\star = r_G \cdot \sqrt{\left(\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right)^2 - \frac{39}{400} \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right)^2}.$$

Setzt man nun r_G, $r_M^\star$, r_M, r_K und $r_K^\star$ in (1) ein, so erhält man $h \approx 18,02$. Damit ist der Weihnachtsmann ungefähr 180 cm groß.

9 Schlittenwettrennen

Autoren: Corinna Klapproth, Martin Weiser

9.1 Aufgabe

Endlich ist es geschafft: der Weihnachtsmann und Knecht Ruprecht haben nun auch das letzte Geschenk verpackt. Das muss gefeiert werden! Mit etwas Weihnachtsgebäck und einigen Flaschen Glühwein machen die beiden es sich vor dem Berg Geschenke gemütlich. Und während sie da so sitzen, beginnen ihre Gedanken um den bevorstehenden Tag zu kreisen. Die Geschenke müssen so schnell wie möglich auf Schlitten in die verschiedenen Dörfer gebracht werden – die Kinder können es schon kaum noch erwarten. Knecht Ruprecht hat mittlerweile schon so einige Glühweine getrunken und ist sich sicher: er kann die Schlitten viel schneller ziehen als der Weihnachtsmann! Das lässt der Weihnachtsmann natürlich nicht auf sich sitzen. Und so vereinbaren die beiden für den nächsten Morgen ein Schlittenwettrennen, bei dem ein vollbe-

packter Schlitten von Schneehausen nach Wichtelstedt gebracht werden soll. Schneehausen und Wichtelstedt sind zwei Bergdörfer auf gleicher Höhe an gegenüberliegenden Hängen, die durch eine 100m lange Brücke verbunden sind. Der Sieger soll für jede volle Sekunde Vorsprung eine Weihnachtsmandel vom Verlierer bekommen.
Als Knecht Ruprecht am nächsten Morgen aufwacht, brummt ihm ganz schön der Kopf und die Beine fühlen sich an wie Blei – da hat er am Abend zuvor wohl doch zu viel Glühwein getrunken... So wird er gegen den Weihnachtsmann, der sicherlich viel fitter ist, bestimmt keine Chance haben! Verzweifelt legt er sich wieder zurück in sein Bett, doch da kommt ihm auf einmal eine Idee: er muss den Schlitten ja nicht unbedingt über die Brücke ziehen! Stattdessen könnte er sich doch auch von den Weihnachtswichteln eine Rutsche aus Schnee durch das Tal bauen lassen und auf dem Schlitten von Schneehausen nach Wichtelstedt rutschen. Das wäre viel weniger anstrengend und vielleicht wäre er sogar schneller als der Weihnachtsmann. Gesagt, getan! Sofort macht er sich an die Arbeit und tüftelt aus, welche Form seine Schlittenbahn haben soll, damit er möglichst schnell in Wichtelstedt ankommt. Knecht Ruprecht überlegt: „Erstmal müsste die Bahn steil nach unten führen, damit ich richtig Schwung bekomme. Dann ein Stück rüber auf die andere Seite des Tals, und zum Schluss wieder hoch. Eigentlich sollte da doch eine symmetrische Bahn herauskommen. Aber bei jedem Knick der Bahn bekomme ich bestimmt einen üblen Stoss - also besser keine Knicke.“ Er beschließt eine geeignete Bahn mit der Form einer Parabel 2.Ordnung zu nehmen. Auch die Weihnachtswichtel sind mit dabei und rechtzeitig zum Anpfiff ist seine Schlittenrutsche fertig.
Frage:
Wer gewinnt wie viele Weihnachtsmandeln, wenn der Weihnachtsmann mit $2m/s$ über die Brücke trabt? Die Schlitten gleiten natürlich reibungsfrei(Erdbeschleunigung $g = 9,81m/s^2$).

Antwortmöglichkeiten:

1. Der Weihnachtsmann gewinnt 25 Weihnachtsmandeln, weil Knecht Ruprecht nur halb so schnell ziehen kann.

2. Knecht Ruprecht gewinnt zwischen 21 und 35 Weihnachtsmandeln.

3. Der Weihnachtsmann gewinnt zwischen 21 und 35 Weihnachtsmandeln.

4. Keiner von beiden gewinnt eine Weihnachtsmandel, weil die Schlitten gleich schnell sind.

5. Knecht Ruprecht gewinnt zwischen 40 und 50 Weihnachtsmandeln.
6. Der Weihnachtsmann gewinnt zwischen 40 und 50 Weihnachtsmandeln.
7. Knecht Ruprecht gewinnt 25 Weihnachtsmandeln, weil seine Bahn doppelt so schnell ist.
8. Knecht Ruprecht gewinnt höchstens 20 Weihnachtsmandeln.
9. Der Weihnachtsmann gewinnt höchstens 20 Weihnachtsmandeln.
10. Der Weihnachtsmann gewinnt unendlich viele Weihnachtsmandeln, weil Knecht Ruprecht nicht im Ziel ankommt.

Projektbezug:
Knecht Ruprecht steht vor einem Optimierungsproblem, das durch Differentialgleichungen beschrieben wird, hier die Newtonschen Bewegungsgleichungen. Komplexere Optimierungsprobleme mit Differentialgleichungen treten in vielen technischen, medizinischen und wirtschaftlichen Anwendungen auf. In verschiedenen Projekten des MATHEON werden mathematische Verfahren zur Lösung solcher Probleme entwickelt.

9.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 5
Ein möglicher Lösungsansatz für diese Aufgabe ist, die Bewegung des Schlittens auf einer vorgeschlagenen Bahn durch numerische Integration der Bewegungsleichung zu simulieren. Diese führt zwar nicht auf die schnellste Schlittenbahn, liefert aber die korrekte Lösung unter den Antwortmöglichkeiten.

Eine Parabel 2. Ordnung führt zu folgenden Überlegungen: Bei $x = 0$ startet Knecht Ruprecht in Schneehausen, da muss also $y(0) = 0$ gelten. Und in Wichtelstedt muss er bei $x = 100$ wieder ankommen, also gilt da $y(100) = 0$. Nur der Scheitelpunkt der Parabel, also die Tiefe der Bahnkurve, ist ihm nicht klar. Dafür setzt er erstmal einen Parameter a ein:

$$y(x) = a\left((x-50)^2 - 50^2\right)$$

„Die Zeit, bis ich in Wichtelstedt ankomme, hängt bestimmt vom Parameter a ab, also muss ich den möglichst gut wählen.“, denkt sich Ruprecht. Dafür muss er aber seine Geschwindigkeit $v(x)$ während der Fahrt ausrechnen. Wegen der Energieerhaltung (der Schlitten gleitet ja reibungsfrei) ist die Summe aus kinetischer und potentieller Energie des Schlittens konstant, d.h.

$$E(t) = \frac{1}{2}m|v(x)|^2 + mgy(x) = \text{const.}$$

Da die potentielle Energie des Systems zum Anfangszeitpunkt Null ist und der Schlitten am Anfang keine Geschwindigkeit hat, gilt für die Energie $E(0) = 0$. Wegen $m > 0$ gilt somit

$$|v(x)|^2 = -2gy(x) = -2ga\left((x-50)^2 - 50^2\right) .$$

„Die Geschwindigkeit v führt mich aber schräg nach unten – eigentlich interessiert mich ja nur die horizontale Geschwindigkeit v_x“, überlegt Ruprecht. Im

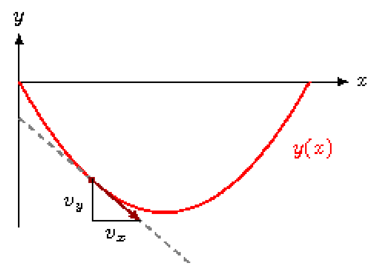


Abbildung 4: Parabelbahn mit Steigungsdreieck

Steigungsdreieck (Abbildung 4) gilt

$$v_y(x) = \frac{dy(x)}{dx}v_x(x) ,$$

wobei sich die Steigung der Bahn zu

$$\frac{dy(x)}{dx} = y'(x) = 2a(x-50)$$

berechnen lässt. Also ist

$$|v(x)|^2 = v_x(x)^2 + v_y(x)^2 = (1 + 4a^2(x-50)^2)v_x(x)^2$$

und

$$v_x(x) = \sqrt{\frac{|v(x)|}{1+4a^2(x-50)^2}} = \sqrt{\frac{-2ga\left((x-50)^2 - 50^2\right)}{1+4a^2(x-50)^2}} . \qquad (2)$$

„Die Zeit t, die ich pro horizontaler Wegstrecke x brauche, ist ja gerade $1/v_x$", denkt er sich. „Dann teile ich einfach die halbe horizontale Strecke von 0 bis 50 in n gleiche Teile zwischen den Punkten x_i, $i = 0, \ldots, n$ ein, dann ist die Zeit, die ich insgesamt brauche,

$$T = 2 \sum_{i=1}^{n} \frac{50/n}{v_{x,i}}. \tag{3}$$

Allerdings ist $v_{x,i}$ auf den Teilstrecken nicht konstant. Wenn ich einfach die mittlere Geschwindigkeit

$$v_{x,i} = v_x \left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2} \right) \tag{4}$$

verwende, wird es wohl ungefähr stimmen. Zumindest, wenn die Teilstücke nicht zu lang sind."
Der Ausdruck (3) hängt vom Parameter a ab. Rechnet man T für verschiedene Werte von a aus, findet man schnell den besten Wert $a \approx 0.015$. Dabei sollte n nicht zu klein gewählt werden, damit die Teilstücke nicht zu groß sind und die Näherung $v_{x,i} \approx v_x(x)$ für $x \in [x_{i-1}, x_i]$ genau genug ist. Daher empfiehlt sich die Berechnung mit Bleistift und Papier allenfalls für sehr lange Winterabende. Ob die Berechnung genau genug ist, erkennt man durch den Vergleich der Werte von T mit unterschiedlichem n.
Es stellt sich heraus, dass $T \approx 8.2s$ gilt. Damit beträgt der Vorsprung von Knecht Ruprecht gegenüber dem Weihnachtsmann, der $50s$ benötigt, 41 (volle) Sekunden. Knecht Ruprecht gewinnt also 41 Weihnachtsmandeln.

Zusatzinformation: Die schnellste Bahn ist die Brachistochrone.
Gesucht ist eine Funktion $y(x)$, für die die Zeit

$$T[y] = \int_0^{100} \frac{d}{dx} t(x)\, dx = \int_0^{100} \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{-2gy(x)}}\, dx\,,$$

die der Schlitten auf einer beliebigen Bahnkurve $y(x)$ benötigt, unter den Nebenbedingungen $y(0) = 0$ und $y(100) = 0$ minimal ist. Wegen des Noether-Theorems muss $y(x)$ die Differentialgleichung

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2Ry = -1$$

erfüllen, deren Lösung eine Zykloide ist. Mit Hilfe des Parameters $\varphi \in [0, 2\pi]$, lässt sich diese schreiben als

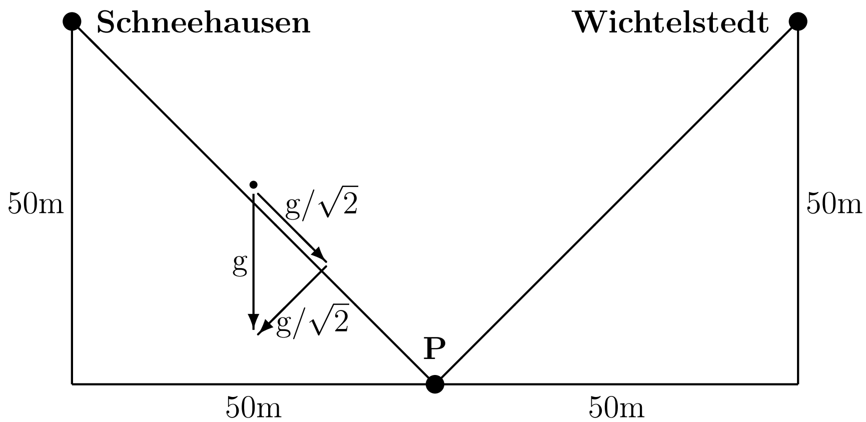
$$\begin{aligned} x(\varphi) &= \frac{50}{\pi}(\varphi - \sin\varphi) \\ y(\varphi) &= \frac{50}{\pi}(\cos\varphi - 1)\,. \end{aligned}$$

Die Zeit, die der Schlitten auf dieser Bahn benötigt, beträgt $T \approx 8,003s$.

Alternativer Lösungsweg: Wir betrachten zunächst den Punkt P, der sich in 50 Meter Tiefe in der Mitte zwischen Schneehausen und Wichtelstedt befindet (siehe Bild), und wir lassen Ruprecht auf einer geraden Linie von Schneehausen nach P hinuntergleiten. Wir zerlegen die Erdbeschleunigung g (mit einem Kräfteparallelogramm, das in diesem Fall ein Kräftequadrat ist) in eine erste Komponente $g/\sqrt{2}$, die in Richtung von P wirkt und in eine zweite Komponente $g/\sqrt{2}$ normal zur Fahrtrichtung. Die erste Komponente beschleunigt den Schlitten auf der Strecke Schneehausen bis P also mit einer Beschleunigung von $a = g/\sqrt{2}$, und die Länge dieser Strecke beträgt $s = 50\sqrt{2}\,m$.
Nun müssen wir uns an den Anfängerkurs Physik zurückerinnern, in dem wir die Formel $s = \frac{1}{2}at^2$ kennengelernt haben. Diese Formel schreiben wir um zu

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{100\sqrt{2}}{g/\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{200}{g}} \approx \sqrt{\frac{200}{9,81}} \approx 4,515.$$

Auf dieser Geraden braucht der Schlitten also nur rund vier-einhalb Sekunden bis zur Mittellinie zwischen Schneehausen und Wichtelstedt. Da die beste Parabel mindestens so gut wie diese gerade Linie ist (Geraden sind ja nur ein ganz spezieller Spezialfall von Parabeln), benötigt der Schlitten auf der besten Parabel höchstens vier-einhalb Sekunden bis zur Mittellinie und dann (aus Symmetriegründen) noch einmal dieselbe Zeit von der Mittellinie bis nach Wichtelstedt hinauf.
Auf der besten Parabelbahn braucht Ruprecht also höchstens 9 Sekunden, während der Weihnachtsmann 50 Sekunden braucht. Damit fallen neun Antworten weg, und Antwort 5 bleibt als einzig mögliche Antwort übrig.


Schneehausen
Wichtelstedt
50m
$g/\sqrt{2}$
g
$g/\sqrt{2}$
50m
P
50m
50m

10 Geschenketransport

Autor: Paul Martijn Visser, Jeroen Spandaw (NL)

10.1 Aufgabe

Hinweis: In Aufgabe 10 hatte sich ein Fehler eingeschlichen, sodass die Aufgabe im Kalender 2011 aus der Wertung genommen wurde. Einerseits war dies auf einen Übersetzungsfehler zurückzuführen, anderseits fehlten aber wichtige Erklärungen, die für eine eindeutige Lösung der Aufgabe benötigt werden. Die Aufgabe im Lösungsheft wurde jetzt so geändert, dass eine eindeutige Lösung möglich ist. Änderungen, die zu einer korrekten Aufgabe führen, sind rot hervorgehoben. Dabei wurde nur wenig verändert, allerdings geht dadurch die eigentliche Intuition der Lösung verloren und die Aufgabe ist nun einfacher geworden. Nur so war uns aber eine Richtigstellung möglich, ohne die Aufgabe komplett neu zu formulieren.

Die Wichtel Pat und Mat müssen ein großes Weihnachtspaket von *Pathausen* nach *Mathausen* bringen. Leider haben sie dafür nur einen Schlitten mit Rentier zur Verfügung. Jeder von beiden kann das Paket auf dem Schlitten transportieren, aber natürlich können nicht beide gleichzeitig mit dem Paket auf dem Schlitten fahren. Zu Beginn sind Pat, Mat, das Paket und der Schlitten in *Pathausen*. Pat und Mat fahren und laufen mit verschiedenen Geschwindigkeiten. (Wir nehmen für beide konstante Geschwindigkeiten an, die für Pat und Mat verschieden sein können.) Dabei wird immer schneller Schlitten gefahren als gelaufen. Damit beide so schnell wie möglich mit dem Paket nach *Mathausen* kommen, machen sie folgenden Plan: Pat fährt ein Stück mit dem Schlitten, stellt dann den Schlitten mit dem Paket ab und läuft weiter. Mat läuft bis zu der Stelle, wo der Schlitten steht, und fährt weiter. Dann überholt er Pat und stellt später den Schlitten wieder ab. Auf diese Weise wechseln sie sich ab, wobei der Schlittenfahrer den Laufenden immer wieder einholt. Pat und Mat wissen wie schnell der jeweils andere laufen oder fahren kann. Auch wenn es dadurch manchmal Streitereien gibt, wenn einer mit dem Schlitten durch die Gegend rast oder der andere beim Laufen bummelt, müssen Sie es akzeptieren. Ihre Aufgabe ist erst dann gelöst, wenn beide Wichtel in *Mathausen* angekommen sind. Wie oft müssen Pat und Mat wechseln und an welchem Ort geschieht das?

Antwortmöglichkeiten:

1. Nicht wechseln: Mat fährt, und Pat läuft die gesamte Strecke.
2. Nicht wechseln: Pat fährt, und Mat läuft die gesamte Strecke.
3. Sie müssen genau einmal wechseln. Dabei ist es nicht wichtig, wo das geschieht.
4. Sie müssen genau einmal wechseln, und zwar an der richtigen Stelle.
5. Sie müssen öfter als einmal wechseln. Wo das geschieht, ist nicht wichtig, solange sie einander überholen.
6. Sie müssen öfter als einmal wechseln. Dabei müssen alle Wechsel an der richtigen Stelle stattfinden.
7. Sie müssen öfter als einmal wechseln. Dabei ist nur der Ort von genau einem Wechsel wichtig.

8. Sie müssen öfter als einmal wechseln. Dabei ist der Ort von genau zwei Wechseln wichtig.

9. Es ist nicht wichtig, ob einmal oder öfter gewechselt wird, und es ist nicht wichtig, wo das geschieht.

10. Es ist nicht wichtig, ob einmal oder öfter gewechselt wird, wenn nur mindestens der zeitlich letzte Wechselpunkt richtig gewählt wird.

10.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 10
Wir zeichnen ein Weg-Zeit-Diagramm für die Bewegung von Pat und Mat. Die Graphen, die die Bewegungen von Pat und Mat darstellen, bestehen aus Strecken mit mindestens zwei unterschiedlichen Steigungen, die den Lauf- und Schlittenfahrtgeschwindigkeiten entsprechen. Die Ortskoordinaten der Punkte, an denen sich die Steigung ändert, entsprechen den Wechselpunkten. Zwischen zwei solchen Wechselpunkten müssen die Graphen einander schneiden, denn Pat überholt Mat oder umgekehrt. Wir nennen diese Schnittpunkte $P_n(t_n, x_n)$. Die zwei Graphen bilden ein Muster aus ähnlichen Vierecken mit gemeinsamen Eckpunkten. Dabei liegen alle Punkte P_n auf derselben Geraden durch den Anfangspunkt $P_0(0,0)$ und den Zielpunkt $P_z(t_z, x_z)$. Dabei ist x_z die Entfernung zwischen Mathausen und Pathausen. Nur wenn Pat und Mat gleichzeitig im Punkt P_z ankommen, benötigen sie die kürzeste Zeit t_z. Diese hängt nicht davon ab, ob sie einmal oder öfter gewechselt haben. Die Wechselpunkte müssen aber so gewählt werden, dass Pat und Mat gleichzeitig in P_z, d.h. in Mathausen ankommen. Werden beispielsweise die ersten $n-1$ Wechselpunkte frei gewählt, so muss die Position für den letzten Wechsel aus dieser Bedingung bestimmt werden.

11 Pfeifenraucher

Autor: Gerhard Woeginger (TU Eindhoven)

11.1 Aufgabe

Neun Wichtel haben heute nachmittag in der Werkstatt gearbeitet. Die Wichtel haben die Werkstatt (zu verschiedenen Zeitpunkten) betreten, sie haben gebohrt, gefeilt, gesägt, gehämmert, geraspelt, geschraubt, gezimmert und geleimt und schließlich nach getaner Arbeit die Werkstatt (zu verschiedenen Zeitpunkten) wieder verlassen. Nur ein einziger der neun Wichtel ist zwischendurch (mindestens einmal) in den Garten gegangen, um sein Pfeifchen zu rauchen.
Am Abend erzählen die Wichtel dem Weihnachtsmann, welche anderen Wichtel sie in der Werkstatt gesehen haben.

- Atto hat Bilbo, Chico, Dondo, Femto, Gumbo und Izzo gesehen.
- Bilbo hat Atto, Dondo, Espo und Izzo gesehen.
- Chico hat Atto, Dondo, Espo, Gumbo, Harpo und Izzo gesehen.
- Dondo hat Atto, Bilbo, Chico und Izzo gesehen.
- Espo hat Bilbo, Chico, und Izzo gesehen.
- Femto hat Atto, Gumbo und Izzo gesehen.
- Gumbo hat Atto, Chico, Femto, Harpo und Izzo gesehen.
- Harpo hat Chico, Gumbo und Izzo gesehen.
- Izzo hat alle acht anderen Wichtel gesehen.

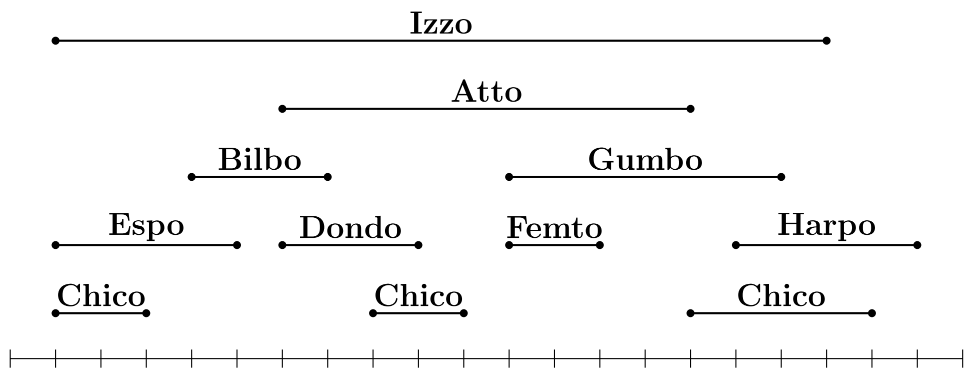
Diese Angaben sind vollständig: wenn zwei Wichtel einander nicht gesehen haben, so waren sie auch nicht gleichzeitig in der Werkstatt. Welcher der neun Wichtel ist der Pfeifenraucher?

Antwortmöglichkeiten:

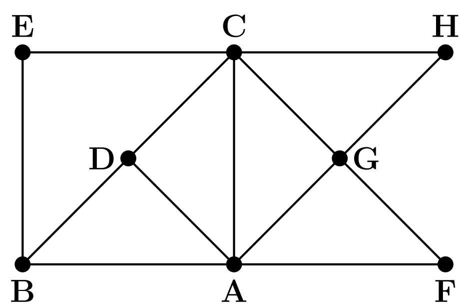
1. Atto ist der Pfeifenraucher.
2. Bilbo ist der Pfeifenraucher.
3. Chico ist der Pfeifenraucher.
4. Dondo ist der Pfeifenraucher.
5. Espo ist der Pfeifenraucher.
6. Femto ist der Pfeifenraucher.
7. Gumbo ist der Pfeifenraucher.
8. Harpo ist der Pfeifenraucher.
9. Izzo ist der Pfeifenraucher.
10. Aus den Angaben der Wichtel kann man nicht schlüssig ableiten, welcher Wichtel der Pfeifenraucher ist.

11.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 3
Der Wichtel Chico ist der Pfeifenraucher. Die folgende Abbildung zeigt eine mögliche Anordnung der Zeitintervalle, während der die Wichtel in der Werkstatt waren. In diesem Fall hat Chico zwei Rauchpausen gemacht und dabei mehr Zeit im Garten als bei der Arbeit verbracht:



Wie zeigt man, dass Chico der einzig mögliche Pfeifenraucher ist? Wir werden von nun an alle Wichtel mit ihren Anfangsbuchstaben abkürzen. Izzo kann unberücksichtigt bleiben, da er von allen acht anderen Wichteln gesehen wurde. Die folgende Abbildung fasst zusammen, welche der acht Wichtel A,B,C,D,E,F,G,H einander gesehen haben.



Wir müssen acht Wichtel finden, deren Arbeitszeiten jeweils ein einziges Intervall bilden. Solche Wichtel wollen wir *Intervall-Wichtel* nennen.
Beobachtung #1: A, B, C, E können nicht allesamt Intervall-Wichtel sein. Hier ist ein Beweis. Da A und E einander nicht gesehen haben, sind ihre Intervalle

disjunkt. Das B-Intervall muss sowohl A-Intervall als auch E-Intervall schneiden, und das C-Intervall muss ebenfalls sowohl A-Intervall als auch E-Intervall schneiden. Dann haben aber auch B und C einander gesehen. Widerspruch!
Beobachtung #2: B, C, D, E können nicht allesamt Intervall-Wichtel sein. Das Argument ist analog zu dem in der ersten Beobachtung.
Beobachtung #3: A, C, D, F, G, H können nicht allesamt Intervall-Wichtel sein. Der Beweis ist ein wenig mühsam. Da D, F, H einander paarweise nicht gesehen haben, sind ihre drei Intervalle disjunkt. Eines der drei Intervalle liegt in der Mitte zwischen den beiden anderen. (i) Falls das D-Intervall in der Mitte liegt, muss das G-Intervall vom F-Intervall bis zum H-Intervall reichen und dabei das D-Intervall schneiden. Widerspruch, da D und G einander nicht gesehen haben. (ii) Falls das F-Intervall in der Mitte liegt, erhalten wir einen ähnlichen Widerspruch mit dem C-Intervall. (iii) Falls das H-Intervall in der Mitte liegt, erhalten wir einen ähnlichen Widerspruch mit dem A-Intervall.

Nun fügen wir die drei Beobachtungen zusammen. Der Pfeifenraucher muss einer der vier Wichtel A, B, C, E sein; er muss einer der vier Wichtel B, C, D, E sein; er muss einer der sechs Wichtel A, C, D, F, G, H sein. Die einzige Möglichkeit ist daher der Wichtel C als Pfeifenraucher.

12 Weihnachtsstern

Autoren: Robert Bartz, Grit Luckmann, Sabiene Zänker

12.1 Aufgabe

In der Vorweihnachtszeit sind nicht nur die Kinder ganz aufgeregt. Auch das große Team des Weihnachtsmanns ist da nicht ausgenommen. Das war vor hundert Jahren so und das ist auch heute noch so. Die Weihnachtswichtel müssen jedes Jahr an so viele kleine und große Dinge denken. Am Abend vor dem ersten Advent saßen ein paar von ihnen nach getaner Arbeit vor dem Kaminfeuer, knackten Nüsse und schauten in den abendlichen Sternenhimmel. Der Weihnachtsstern leuchtete viel heller als die anderen Sterne und jeder von ihnen konnte ihn sehen.
Der Weihnachtsmann freute sich über seine kleinen, fleißigen Helfer. Er wusste, dass sie gern wetteiferten, nicht nur wenn es um das Lösen von kniffligen Herausforderungen ging. Schließlich winkten für den schnellsten mit der richtigen Lösung stets tolle und leckere Überraschungen. Und gut trainiert waren sie ja alle.
Also hier das Problem:
Wie groß ist die Fläche des abgebildeten regelmäßigen, farbig gekennzeichne-

ten, Weihnachtssterns in Abhängigkeit vom Radius R des Umkreises?

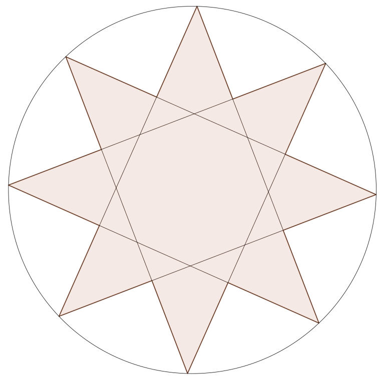
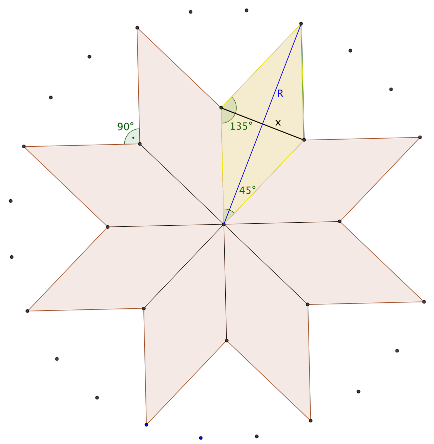


Abbildung 5: Weihnachtsstern

Antwortmöglichkeiten:

1. $\left(\frac{5}{8} + \frac{\pi}{3}\right) \cdot R^2$ FE
2. $\sqrt{2} \cdot R^2$ FE
3. $\frac{6}{5}\sqrt{2} \cdot R^2$ FE
4. $\left(1 + \frac{\pi}{5}\right) \cdot R^2$ FE
5. $R^2 \cdot (2 + \sqrt{3})$ FE
6. $R^2 \cdot (1 + \sqrt{2})$ FE
7. $R^2 \cdot (3 - \sqrt{2})$ FE
8. $\left(\frac{1}{4} + \sqrt{2}\right) \cdot R^2$ FE
9. $R^2 \cdot (1 + \sqrt{5})$ FE
10. $4 \cdot R^2 \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right)$ FE



12.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 10.

Bei einem möglichen Lösungsweg wird der Stern wie in der Abbildung in acht zueinander kongruente Rhomben zerlegt. Dies folgt aus der Rotationssymmetrie des Weihnachtssterns. Für den Inhalt der Fläche gilt daher:

$$A_{St} = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot R \cdot x. \tag{5}$$

Mit Hilfe des Tangens ergibt sich:

$$\tan(22,5°) = \frac{x}{R} \text{ und somit } x = R \cdot (\sqrt{2} - 1). \tag{6}$$

Einsetzen von (2) in (1) ergibt den Inhalt der gesuchten Fläche

$$A_{St} = 4 \cdot R^2 \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right).$$

13 Adventsliga

Autoren: Christian Raack, Axel Werner, Kati Wolter

13.1 Aufgabe

Der Weihnachtsmann und alle seine Untergebenen (Wichtel, Rentiere und auch der Osterhase stellt ein Gastteam) spielen in der Vorweihnachtszeit in der Adventsliga Fußball. Dort gibt es 10 Mannschaften, die in 2 Vorrundengruppen spielen. In jeder Gruppe gibt es also 5 Teams. In einer Gruppe spielt jede Mannschaft gegen jede andere, jeweils ein Hin- und ein Rückspiel. Das geschieht nach den Regeln der ASA (Advent Soccer Association), deren Präsident natürlich der kürzlich mit 103% der Stimmen wiedergewählte Niko Laus ist. Die Regeln der ASA sind identisch mit denen der 1. Schneeballliga:

- Für ein nach Toren gewonnenes Spiel bekommt der Sieger 3 Punkte. Bei einem Unentschieden bekommen beide Mannschaften 1 Punkt. Andere

Punkte werden nicht vergeben.

- Die Platzierungen in einer Vorrundengruppe werden über den Punktestand entschieden. (Je höher die Punktezahl desto besser die Platzierung.)
- Sollten nach der Vorrunde zwei Mannschaften die gleiche Punktzahl haben, entscheidet immer der Adventskoeffizient über die Platzierung. Es gibt also nie Streitigkeiten.
- Die beiden besten Mannschaften jeder der beiden Gruppen kommen ins Halbfinale.

Die 10 Mannschaften rätseln nun schon seit Wochen wie viele Punkte sie eigentlich benötigen. Die besseren peilen das Halbfinale an. Dort winkt als Preis der goldene Schneeball. Die bescheideneren wollen wenigstens den letzten Platz in ihrer Gruppe vermeiden. Die Sportreporter wollen möglichst öffentlichkeitswirksame Statistiken aufstellen.
Daher sind inzwischen etliche Debatten entbrannt, bei denen natürlich jeder seinen Senf dazu geben muss. Welche der folgenden heißdiskutierten Aussagen ist richtig?

Antwortmöglichkeiten:

1. Jedes Team erreicht mindestens 2 Punkte in der Vorrunde.
2. Am Ende der Vorrunde können die erreichten Punkte aller Teams einer Gruppe zusammengerechnet nicht genau 41 Punkte ergeben, da 41 eine Primzahl ist.
3. Mit 24 Toren ist man sicher im Finale.
4. Die in der Vorrunde erreichten Punkte aller Halbfinalteilnehmer ergeben zusammengerechnet mindestens 37 Punkte.
5. Ein Team muss mindestens einmal in der Vorrunde gewinnen, um ins Halbfinale zu kommen.
6. Am Ende der Vorrunde ergeben die erreichten Punkte aller Teams einer Gruppe zusammengerechnet mindestens 42 Punkte.

7. Mit 13 Punkten in der Vorrunde wird ein Team garantiert nicht letzter seiner Gruppe.

8. Am Ende der Vorrunde ergeben die erreichten Punkte aller Teams einer Gruppe zusammengerechnet höchstens 58 Punkte.

9. Mit 18 Punkten aus der Vorrunde ist man sicher im Halbfinale.

10. Die in der Vorrunde erreichten Punkte aller Halbfinalteilnehmer ergeben zusammengerechnet höchstens 70 Punkte.

Projektbezug:
Die Planung von Turnieren und auch Spiel-Plänen in Sportligen ist ein durchaus nicht-triviales Problem bei der viele Nebenbedingungen zu berücksichtigen sind. Dazu gehören neben dem eigentlichen zeitlichen Scheduling der Spiele (spielfreie Tage, minimale Abstände zwischen Hin- und Rückspiel, etc.) auch die Verfügbarkeit von Stadien, Sicherheitsvorkehrungen, Übertragungsrechte und Wechselwirkungen mit anderen Ligen. Solche Planungsprobleme lassen sich mit Methoden der ganzzahligen Programmierung lösen, die im Matheon auch für weitaus komplexere Fragestellungen z.B. aus der Telekommunikation oder dem Öffentlichen Nahverkehr Anwendung finden. Auch hinter obigen Fragen verstecken sich Optimierungsprobleme (Wie viele Punkte kann der Dritte einer Gruppe *maximal* erreichen?), die sich mit entsprechender (u.a. im Matheon entwickelten) Methodik und Software sofort beantworten lassen. Eine der wesentlichen Methoden aus der ganzzahligen Programmierung ist die sukzessive Einschränkung des Lösungsraumes (engl.: Bounding). Damit kommt man auch hier schnell ans Ziel. Wie viele Punkte können denn in Summe in einer Gruppe überhaupt *maximal* gewonnen werden? Was ist die *minimale* Punktzahl?

13.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 7.

Es ist zunächst von Vorteil, sich darüber klar zu werden, wie viele Punkte in einer der beiden Gruppen minimal/maximal erreicht werden können. Es gibt in jeder Gruppe genau $5 \cdot 4 = 20$ Spiele. Jedes der Spiele wird (unabhängig von den Mannschaften) mit 2 oder 3 Punkten bewertet. Insgesamt werden

also minimal 40 (alle Spiele sind unentschieden) und maximal 60 Punkte vergeben (keines der Spiele ist unentschieden). Es sind auch alle Gesamtpunktzahlen zwischen 40 und 60 möglich. Bei einer Gesamtpunktzahl von x mit $40 \leq x \leq 60$ ist die Anzahl der Spiele, bei denen eine der Mannschaften 3 Punkte bekommt einfach $(x - 40)$ und es gibt $(60 - x)$ Spiele, die mit einem Unentschieden enden. Jetzt können wir schon die Antworten 2., 6. und 8. ausschließen. Auch 5. ist quatsch, da ja jedes Spiel unentschieden sein kann. Ebenfalls ausschließen können wir 1., da ein Team ja alle Spiele verlieren kann. Wer Antwort 3. angekreuzt hat, hat einfach keine Ahnung von Fußball (das soll passieren). Es bleiben 4., 7., 9. und 10.
Wenn alle Spiele unentschieden sind, dann hat jede Mannschaft 8 Punkte, also auch die Halbfinalteilnehmer. Es gibt 4 Halbfinalteilnehmer mit in diesem Fall insgesamt 32 Punkten. Antwort 4. fällt also auch weg. Für Antwort 9. und 10. betrachte folgende Punkteverteilung:

1. 18
2. 18
3. 18
4. 6
5. 0

Das ist möglich, wenn der Letzte immer verliert und der Vorletzte nur gegen den Letzten gewinnt. Die ersten Drei spielen nunmehr folgendermaßen: Nummer 1 gewinnt immer gegen 2. Nummer 2 gewinnt immer gegen 3. Nummer 3 gewinnt immer gegen 1. Somit ist Antwort 9. ausgeschlossen (der Dritte hat ja hier 18 Punkte). Auch 10. stimmt nicht, da somit alle Halbfinalteilnehmer zusammen 72 Punkte haben.
Es bleibt Antwort 7. Das ist auch klar, denn wenn der Letzte 13 Punkte hätte, dann wäre die Gesamtpunktzahl mindestens $5 \cdot 13 = 65$. Das hatten wir aber oben schon ausgeschlossen.

14 Engpass

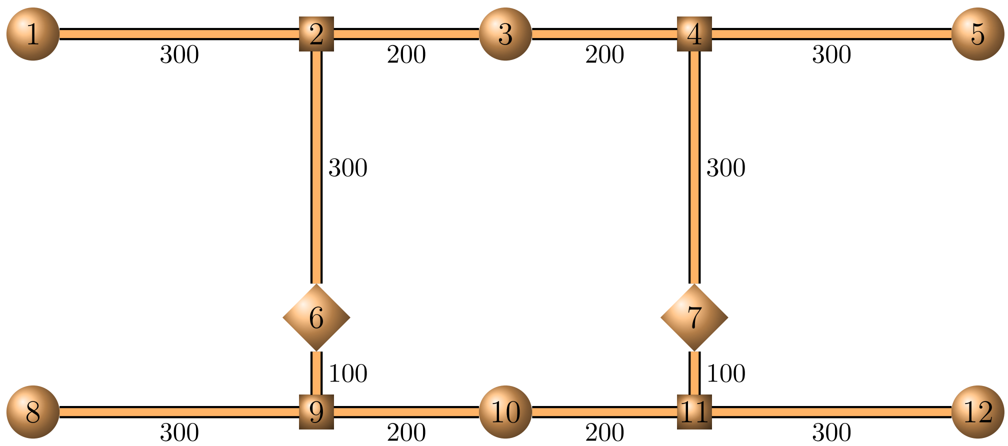
Autoren: Torsten Gellert, Elisabeth Günther, Wolfgang Welz

14.1 Aufgabe

Die Produktion, Verpackung und Auslieferung der Weihnachtsgeschenke stellt den Weihnachtsmann und seine zahlreichen Helfer jedes Jahr vor eine logistische Herausforderung. Seine Produktionsstätten liegen am Nordpol, versteckt vor neugierigen Augen, unter dem Eis. In komplexen Tunnelsystemen werden Geschenke an verschiedenen Stationen bearbeitet und dann von den Wichteln durch die Tunnel zu anderen Stationen transportiert.

Tunnelkreuzungen und die Stationen sind dabei aber so eng, dass sich dort nur ein einziger Wichtel gleichzeitig aufhalten kann. Mit den Gängen sieht es nicht anders aus: Es gibt keine Möglichkeit, dass zwei Wichtel in einem Gang aneinander vorbei laufen können.

Konkrete Probleme gibt es auf Ebene 17 des Tunnelsystems. Der Lageplan dieser Ebene ist in der nächsten Grafik dargestellt:



Zwei Wichtel müssen dort alle Geschenke transportieren. Sie befinden sich jeweils auf Position 6 und 7, wenn sie mit ihrer Arbeit beginnen, und beenden diese dort auch wieder. Jeder Tunnel hat die angegebene Länge in Metern und die beiden Wichtel brauchen für je 100 Meter genau 1 Minute.
Ihre Transporte sind in dieser Tabelle aufgelistet:

Transportnummer	1	2	3	4
Startpunkt	1	12	5	10
Zielpunkt	8	3	8	3

Um sicherzustellen, dass auch kein Geschenk verloren geht, müssen die Wichtel den Transport von dem aktuellen Geschenk beendet haben, bevor sie das nächste aufnehmen können. Insbesondere dürfen sie die Geschenke auch nirgendwo unterwegs ablegen, um sie später wieder aufzuheben.
Um früher mit dem wohlverdienten Feierabend anfangen zu können, planen die beiden Wichtel im Voraus, wer welche Transporte übernimmt und welche Routen sie dabei wählen. Um hierbei möglichst fair zu bleiben, einigen sie sich darauf, dass der Wichtel, der als letzter wieder auf seiner Ausgangsposition ankommt, möglichst früh fertig sein soll. Ihr erster Plan führt zum frühestmöglichen Feierabend, nach genau 36 Minuten. Allerdings würden sie sich dabei in Tunneln entgegenkommen und daher ist ihr Plan nicht umsetzbar.

Den beiden Wichteln soll unter die Arme gegriffen werden. Es wird ihnen vom Weihnachtsmann angeboten, einen zusätzlichen Tunnel graben zu lassen. Allerdings gibt es in dieser Ebene teilweise sehr harten Fels, der nicht direkt durchbohrt werden kann und deshalb umgangen werden muss. Aus diesem Grund kann es vorkommen, dass der Tunnel etwas länger wird als die gemessene Entfernung.

Welcher Tunnel führt dazu, dass es einen Plan gibt, in dem sich die Wichtel nicht in den Tunneln begegnen, aber in dem auch der zuletzt ankommende Wichtel nicht länger als 36 Minuten arbeiten muss?

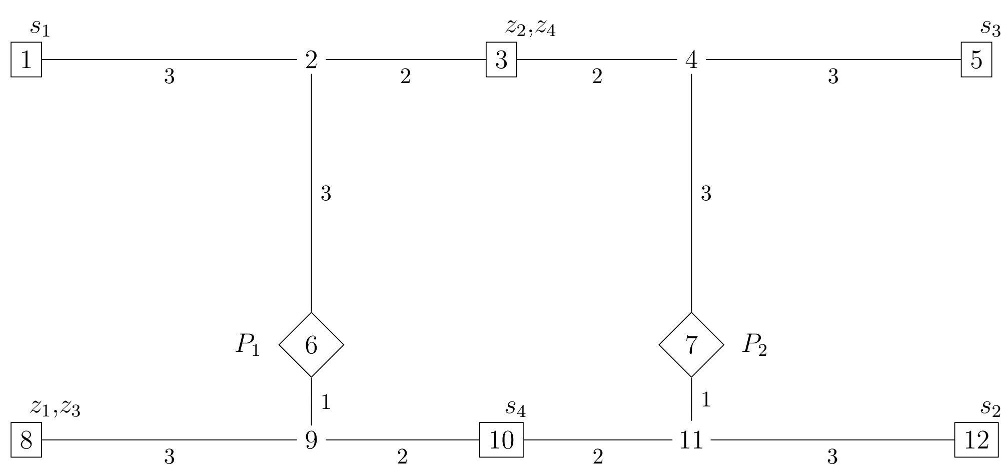
Antwortmöglichkeiten:

1. Auch ohne das Hinzufügen eines Tunnels gibt es eine kollisionsfreie Lösung in 36 Minuten
2. Der Tunnel zwischen 1 und 8 mit einer Länge von 600 Metern
3. Der Tunnel zwischen 1 und 6 mit einer Länge von 700 Metern
4. Ein weiterer Tunnel zwischen 8 und 9 mit einer Länge von 300 Metern
5. Ein weiterer Tunnel zwischen 3 und 4 mit einer Länge von 200 Metern
6. Der Tunnel zwischen 3 und 7 mit einer Länge von 500 Metern
7. Der Tunnel zwischen 6 und 7 mit einer Länge von 400 Metern
8. Der Tunnel zwischen 5 und 12 mit einer Länge von 400 Metern
9. Ein weiterer Tunnel zwischen 1 und 2 mit einer Länge von 400 Metern
10. Keiner der genannten Tunnel führt zu einer entsprechenden kollisionsfreien Lösung

Projektbezug:
Das Besondere an dieser Art von Problemen ist es, dass hier zwei unterschiedliche Optimierungsaspekte kombiniert werden: Zum einen handelt es sich hierbei um ein Wegplanungsproblem, da die Transporte und die Strecken zwischen zwei Transporten möglichst kurz sein sollen. Auf der anderen Seite spielt aber auch die zeitliche Reihenfolge eine wichtige Rolle, da Kollisionen vermieden werden müssen.
Bei der Kombination von Wegplanungsproblemen mit Reihenfolgeproblemen treten viele interessante Aspekte auf, die bei einer unabhängigen Betrachtung der Probleme so nicht vorhanden sind. Genau diese Art von Problemen werden in den Matheon Projekten B24 und C30 gelöst und ihre Zusammenhänge genauer untersucht.

14.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 2
Die nachfolgende Grafik enthält eine Zusammenfassung der gegebenen Ebene zusammen mit den Transporten. Die Beschriftungen der Tunnel geben hier die benötigten Passierzeiten an, die in der Beschreibung der Lösung benutzt werden. Die Ausgangspositionen der Wichtel sind durch P_1 und P_2 markiert. Jeder einzelne Transport T_i ist durch seinen Startpunkt s_i und seinen Zielpunkt z_i dargestellt.



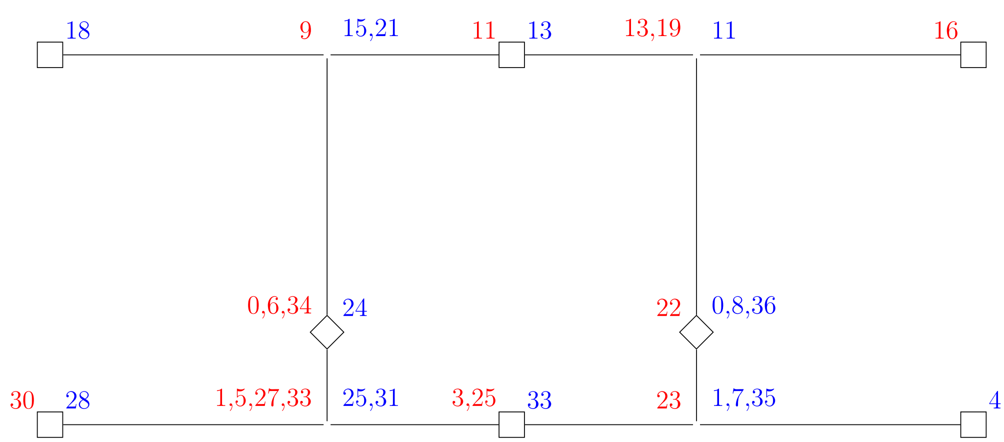
Die Menge aller Ausgangspunkte, Stationen und Kreuzungspunkte wird nachfolgend Knoten genannt.
Im ersten Schritt, werden wir die Bedingungen, dass nur maximal ein Wichtel gleichzeitig in einem Knoten sein darf und sich zwei Wichtel nicht auf einem Tunnel entgegenkommen dürfen, komplett außer Acht lassen.
In diesem Fall stellen folgende Touren eine zulässige Lösung dar, bei der auftretende Kollisionen komplett ignoriert werden:
Wichtel 1 fährt T_4 und dann T_3:

Knoten:	6,	9,	10,	9,	6,	2,	3,	4,	5,	4,	7,	11,	10,	9,	8,	9,	6
Startzeiten:	0,	1,	3,	5,	6,	9,	11,	13,	16,	19,	22,	23,	25,	27,	30,	33,	34

Wichtel 2 fährt T_2 und dann T_1:

Knoten:	7,	11,	12,	11,	7,	4,	3,	2,	1,	2,	6,	9,	8,	9,	10,	11,	7
Startzeiten:	0,	1,	4,	7,	8,	11,	13,	15,	18,	21,	24,	25,	28,	31,	33,	35,	36

Zur besseren Übersicht sind im Folgenden die Zeiten des ersten Wichtels in rot links von den entsprechenden Knoten angezeichnet, die Zeiten des zweiten Wichtels findet man in blau rechts davon:



Diese Möglichkeit entspricht der Lösung, in der der erste Wichtel den nächstgelegenen Startpunkt (10) besucht. Ebenso besucht der zweite Wichtel den nächsten noch nicht besuchten Startpunkt in (12).
Beide gehen nun auf dem kürzestem Weg zu dem (bei beiden identischen) Zielknoten (3). Da der erste Wichtel diesen Knoten früher erreicht, macht er sich im Anschluss auf den Weg zu dem längsten noch vorhandenen Auftrag, der in (5) beginnt.
Für den anderen Wichtel bleibt, dann nur noch ein Auftrag übrig. Alle Auf-

träge werden wieder entlang des kürzesten Weges zwischen ihnen abgearbeitet und dann wird ebenfalls der kürzeste Weg zurück zu den Ausgangspunkten (6) und (7) eingeschlagen.
Auch wenn es naheliegend ist, dass durch dieses Vorgehen eine gute Lösung gefunden ist, muss dies formal doch etwas ausführlicher gezeigt werden:
Da bisher noch eine Vermeidung von Kollisionen außer Acht gelassen wird, ist es immer am besten, für den Transport als auch zwischen zwei Transporten einen kürzesten Weg zwischen den entsprechenden Knoten zu wählen.
Aus diesem Grund ermitteln wir als erstes die kürzesten Entfernungen von den Ausgangspositionen zu den jeweiligen Startknoten der Aufträge sowie die kürzesten Entfernungen der Zielknoten der einzelnen Aufträge zurück zu den Ausgangspositionen und zu den Startknoten von allen anderen Aufträgen.
Es ergibt sich dann folgende Tabelle:

	P_1	P_2	z_1	z_2	z_3	z_4
P_1	–	–	4	5	4	5
P_2	–	–	8	5	8	5
s_1	6	10	10	5	10	5
s_2	8	4	10	9	10	9
s_3	10	6	14	5	14	5
s_4	3	3	5	8	5	8

Zusätzlich sind auch noch die minimalen Zeiten zwischen den einzelnen Transporten wichtig, diese sind in obiger Tabelle rot gekennzeichnet.
Mit diesen Entfernungen müssen wir jetzt nur noch zeigen, dass die gewählte Aufteilung und Anordnung der Transporte (Wichtel 1: T_4,T_3 und Wichtel 2: T_2,T_1) tatsächlich zu einem besseren Ergebnis führt als alle anderen:
Zunächst können wir aussschließen, dass eine Aufteilung, bei der ein Wichtel mehr als 2 Transporte erhält, besser ist. Dies würde für einen Wichtel mindestens einen Zeitaufwand von

$$\begin{aligned} & 8+9+10+\min\{P_i \to s_j\}+2\min\{z_k \to s_j\}+\min\{z_k \to P_i\} \\ = \quad & 27+3+10+4 = 44 > 36 \end{aligned}$$

bedeuten. Ebenso würde eine gemeinsame Zuteilung von T_1 und T_3 zu viel Zeitaufwand produzieren, da diese unabhängig von Reihenfolge und Wichtelzuordnung mindestens Kosten von $10+14+6+10+4 = 44 > 36$ verursacht.
Wählt man nun die Paare T_1, T_4 und T_2, T_3 zur gemeinsamen Bearbeitung

von einem Wichtel aus, errechnet man als Mindestdauer für die Ausführung von T_2 und T_3 von den beiden möglichen Depots aus:

$$
\begin{aligned}
& P1: \\
& 9 + 14 + \min\{P_1 \to s_{2,3}\} + \min\{z_{2,3} \to s_{2,3}\} + \min\{z_{2,3} \to P_1\} \\
= \;& 23 + 8 + 5 + 4 = 40 > 36 \\
& P2: \\
& 9 + 14 + \min\{P_2 \to s_{2,3}\} + \min\{z_{2,3} \to s_{2,3}\} + \min\{z_{2,3} \to P_2\} \\
= \;& 23 + 4 + 5 + 5 = 37 > 36
\end{aligned}
$$

Damit bleibt einzig die Aufteilung der Jobs in die Paare T_1, T_2 und T_3, T_4. Mit dieser Beobachtung reicht es, wenn wir für alle übrigen Kombinationen ausrechnen, dass diese einen späteren Feierabend für einen Wichtel produzieren. Die folgende Tabelle gibt eine Übersicht. Die erste Zahl einer Zelle gibt den ausgerechneten Feierabend von Wichtel P_2, wenn dieser die beiden Transporte der Spalte in angegebener Reihenfolge abarbeitet. Die zweite Zahl der Zelle gibt den Feierabend von Wichtel P_1 an, wenn dieser die beiden Transporte der Zeile in angegebener Reihenfolge abarbeitet.

W_1 \ W_2	T_1, T_2	T_2, T_1	T_3, T_4	T_4, T_3
T_3, T_4	44 & 42	36 & 42	–	–
T_4, T_3	44 & 34	36 & 34	–	–
T_1, T_2	–	–	38 & 40	38 & 40
T_2, T_1	–	–	38 & 36	38 & 36

Jede rote Zahl markiert einen Feierabend, der die bereits erreichten 36 Minuten überschreitet. Da jede andere Zelle eine rote Zahl enthält, sind wir also sicher, dass es sich bei der angegebenen Lösung um eine optimale Lösung handelt und die gewählte Aufteilung und Anordnung auch die einzige ist, die dies tatsächlich leistet.
Als nächstes muss überprüft werden, ob diese Lösung auch mögliche Kollisionen ausschließt. Dies ist aber nicht der Fall, da der Tunnel $(3, 4)$ von beiden Wichteln in unterschiedlicher Richtung durchlaufen wird, und zwar betreten beide Wichtel in der 11. Minute gleichzeitig diesen Tunnel. Ähnliche Probleme treten ebenfalls bei dem Tunnel $(8, 9)$ auf.

Um diese Kollisionen ohne Veränderung des Graphen aufzulösen, gibt es prinzipiell folgende Möglichkeiten:

1. Anpassen welcher Wichtel welche Aufträge in welcher Reihenfolge abarbeitet:
   Wir haben eben gezeigt, dass jede andere Zuteilung von Aufträgen, selbst ohne Berücksichtigung der Kollisionen zu einer schlechteren Lösung führt. Daher sind dann auch die kollisionsfreien Touren immer schlechter.

2. Warten in einem Knoten:
   Da dies zusätzliche Zeit kosten würde, kommt hierfür, wenn überhaupt, nur der erste Wichtel in Frage. Zwei Minuten reichen aber nicht aus, um den anderen Wichtel passieren zu lassen.

3. Verändern der Touren ohne die Auftragsreihenfolge und -zuweisung anzupassen:
   Auch dies ist nicht möglich ohne mehr Zeit zu benötigen.

Eine kollisionsfreie Lösung benötigt also definitiv länger. Damit kann die erste Antwort ausgeschlossen werden
Es gibt also zwei Konflikte, die durch das Hinzufügen von nur einem Tunnel aufgelöst werden müssen:
Die wichtigste Beobachtung ist, dass jede optimale Lösung ohne Berücksichtigung der Kollisionen zwei Konfliktkanten(Tunnel) besitzt. Da wir anhand der gegebenen Entfernungen zeigen konnten, dass nur genau diese Zuteilung von Aufgaben zu Wichteln in Frage kommt, muss dies nach wie vor der Fall sein, wenn der Tunnel die berechnete Distanzmatrix nicht verändert. Die einzige Möglichkeit, die jetzt noch zum Auflösen besteht ist, dass dieser eine Tunnel sowohl für die Nutzung von $(8, 9)$ als auch für die Nutzung von $(3, 4)$ eine alternative Route zur Verfügung stellt.
Die Antwortmöglichkeiten 3. - 9. verändern die minimalen Entfernungen nicht. Die Möglichkeit 8. ist hierbei überhaupt die einzige, die etwas verkürzt, allerdings nur die Entfernung zwischen (5) und (12). Da sowohl (5) als auch (12) beides Startpunkte sind, kann dies aber die Distanzmatrix ebenfalls nicht verbessern. Da die Entfernungen unverändert bleiben, gilt nach wie vor die beste Aufteilung von Wichtel 1: T_4,T_3 und Wichtel 2: T_2,T_1 und auch die kürzesten Wege ändern sich nicht. Der neue Tunnel müsste also eine Umgehung für beide Konfliktkanten ermöglichen. Allerdings bieten die Antworten 3. - 9. höchstens

eine Umgehung für einen Konflikt und können die kollisionsfreie Lösung daher nicht verbessern.

Es bleibt nur noch der Tunnel $(1,8)$ übrig: Dieser Tunnel liefert eine um 4 Minuten kürzere Möglichkeit zum Erledigen der Aufgabe T_1. Diese Abkürzung macht es nun aber möglich, dass der zweite Wichtel, den um 4 Minuten längeren Umweg (über die Knoten 9,6,2) gehen kann um die Aufgabe T_2 zu erledigen.

Zusätzlich dazu liefert dieser Tunnel auch für den ersten Wichtel eine neue Möglichkeit zum Erledigen von T_3, die nur um 2 Minuten länger ist als der beste Weg. Da der erste Wichtel genau diese 2 Minuten Spiel hat, kann er auch genutzt werden:

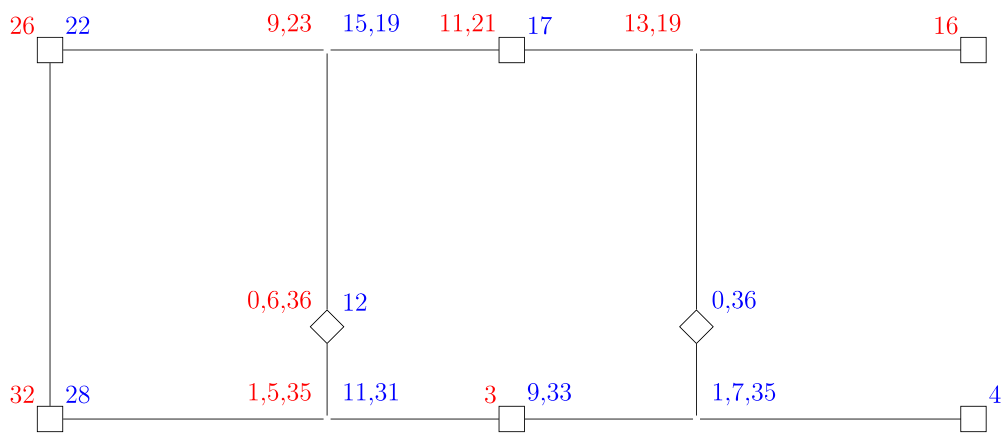
Wichtel 1 fährt T_4 und dann T_3:

Knoten:	6,	9,	10,	9,	6,	2,	3,	4,	5,	4,	3,	2,	1,	8,	9,	6
Startzeiten:	0,	1,	3,	5,	6,	9,	11,	13,	16,	19,	21,	23,	26,	32,	35,	36

Wichtel 2 fährt T_2 und dann T_1:

Knoten:	7,	11,	12,	11,	10,	9,	6,	2,	3,	2,	1,	8,	9,	10,	11,	7
Startzeiten:	0,	1,	4,	7,	9,	11,	12,	15,	17,	19,	22,	28,	31,	33,	35,	36

Um die Kollisionsfreiheit dieser Lösung zu überprüfen, folgt die Lösung zur besseren Übersicht nochmals graphisch:



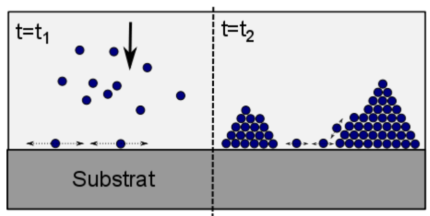
Somit ist nur Antwortmöglichkeit 2. richtig.

15 Laserschwerter

Autor: Maciek Korzec

15.1 Aufgabe

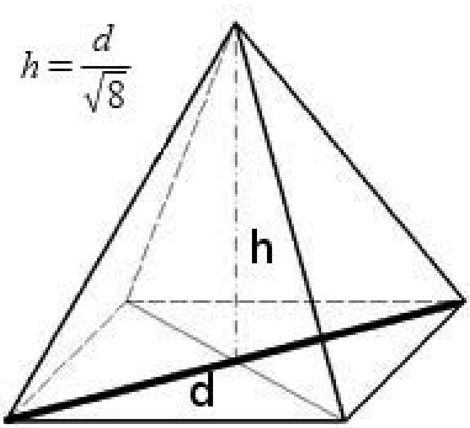
Der Weihnachtsmann hat dieses Jahr wieder einmal viele Wunschzettel erhalten, auf denen Laserschwerter gelistet sind. Nach der Star Wars Prequel-Trilogie in der ersten Hälfte des letzten Jahrzehnts hat sich sein Lager für Laserschwerter, das er Ende der 70er Jahre angelegt hatte, drastisch geleert. Dieses Weihnachten ist es tatsächlich so weit, er muss neue produzieren! Der Weihnachtsmann ist seit geraumer Zeit an Nanotechnologie interessiert und beschließt seinem Hobby nachzugehen, um das Problem zu lösen. Er fängt an, nanoskopisch kleine Halbleiterkristalle wachsen zu lassen, mit denen er Licht verschiedener Farben erzeugen kann (die Kristalle fungieren als aktives Lasermedium). Auf diese Art und Weise kann er moderne Laser produzieren, die er in die Schwerter einbauen möchte, um so die bisher verwendeten, billig wirkenden, farbigen Plastikröhren zu ersetzen. Zur Fertigung lichtemittierender Kristalle benutzt er einen Oberflächendiffusionsprozess. Atome werden bei hoher Temperatur auf einer festen Schicht (einem Substrat) deponiert. Diese finden sich spontan zu Atomgruppen zusammen, welche die Form von winzigen Pyramiden annehmen. Der Atomfluss wird gestoppt und ein Prozess findet statt, bei dem benachbarte Inseln Atome miteinander austauschen. Wegen der



kleinen Skala, auf der das Wachstum stattfindet, kann der Weihnachtsmann sein Lichtmikroskop nicht verwenden und kann nur mit viel Mühe ein Bild der Oberflächen herstellen. Dazu muss er das Verfahren anhalten und kann es nicht wieder fortsetzen. Er sieht zu einem bestimmten Zeitpunkt, von nun an mit $t = 0$ bezeichnet, dass die Pyramiden in Zweiergruppen angeordnet sind. Diese Mini-Cluster haben jeweils einen so großen Abstand zueinander, dass sie verschwindend wenig miteinander kommunizieren (Atome austauschen). Man kann sich also für einen kurzen Zeitraum auf die Zweiergruppen konzentrieren, will man wissen, wie sie sich in diesem Zeitraum verändern. Die zwei Pyramiden haben ihrerseits einen nahezu konstanten Abstand.
Der Weihnachtsmann betrachtet die Pyramiden als kontinuierliche Objekte. Er leitet so folgende sehr vereinfachte Formeln her:

$$\begin{aligned} A_1(t) &= \left((Dt(\bar{A}_1 - \bar{A}_2))^{3/2} + \bar{A}_1^{3/2}\right)^{2/3} , \\ A_2(t) &= \left(-(Dt(\bar{A}_1 - \bar{A}_2))^{3/2} + \bar{A}_2^{3/2}\right)^{2/3} . \end{aligned} \tag{7}$$

Diese beschreiben für ein kurzes Zeitintervall den zeitlichen Verlauf der Mantelflächen $A_1(t), A_2(t)$ von benachbarten Inseln (also die Fläche der 4 Dreiecke). Hierbei ist A_1 die Fläche der größeren Pyramide.



Weiterhin sind $\bar{A}_1 = A_1(0), \bar{A}_2 = A_2(0)$ die Flächen der Pyramiden zum Beginn der Simulation, $D = 0.01\frac{1}{min}$ ist ein von dem Weihnachtsmann bestimmter Diffusions-Geschwindigkeits-Koeffizient. Auf einem Elektronenmikroskopbild kann er überdies die "Durchmesser" der Inseln d (hier: Durchmesser = Diagonale des Quadrats, das die Grundfläche einer Pyramide bildet) und die Höhe $h = \frac{d}{\sqrt{8}}$ ermitteln. Die Durchmesser sind zeitabhängig, $d = d(t)$. Auf dem Elektronenmikroskop-Bild sieht er, dass für die größere Pyramide im Schnitt $d_1(0) = 40nm$, während die kleinere einen Durchmesser von etwa $d_2(0) = 35nm$ hat. Von hier an schrumpft der kleinere Kristall, während der größere wächst. Das Gesamtvolumen des Materials bleibt dabei konstant. Nun hat der Mann mit dem weißen Bart neben seiner Physik-Begeisterung auch eine wahre Leidenschaft für die Mathematik entwickelt. Zwar sind die bisherigen Kristalle schon zu gebrauchen, jedoch hofft er, dass er bei einem bestimmten, mathematisch berühmten und für Schönheit bekannten Volumenverhältniss der Pyramiden besonders kräftiges, leuchtendes Licht emittieren kann. Da er nicht kontinuierlich Bilder der Kristallschicht machen kann, will er ausrechnen, zu welchem Zeitpunkt t^* gilt: $V_1(t^*) = gV_2(t^*)$. Dabei sei V_1 das Volumen der größeren Pyramide und V_2 das der kleineren Pyramide und $g = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ist der sogenannte goldene Schnitt. Dann will er den Prozess anhalten. Wie lange sollte der Weihnachtsmann seinen Versuch etwa laufen lassen:

Antwortmöglichkeiten:

1. 60-61 Minuten
2. 1-2 Sekunden
3. 2-3 Sekunden
4. 9-10 Minuten
5. 43-44 Minuten
6. 100-101 Minuten
7. 1-2 Minuten
8. 4-5 Minuten
9. 1-2 Tagen
10. 45-46 Minuten

Projektbezug:
Bei Solarzellen neuster Generation werden dünne, kristalline Schichten verwendet, die dafür sorgen sollen, dass Wellenlängen des Lichts, die bisher nicht zur Stromerzeugung verwendet werden konnten, nützlich werden. Ein Ansatz ist die Verwendung von sogenannten Quantenpunkten, die tatsächlich, unter ganz bestimmten Voraussetzungen, eine Pyramidenstruktur annehmen und während des Wachstums Atome miteinander austauschen. Um solche Wachstumsprozesse zu verstehen und steuern zu können, versuchen wir mathematische Modelle aufzustellen, welche die Realität widerspiegeln. Die in der Aufgabe beschriebene Problematik ist jedoch noch nicht Thema gewesen, auch wenn Quantenpunkte für Laser verwendet werden und Laserschwerter sicherlich ein beliebtes Wunschobjekt darstellen. Somit sind auch die angegebenen Formeln erfunden. Eine Aufgabe, die realistische Modelle einbezieht, würde den Adventskalenderrahmen leider sprengen.

15.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 5
Man kann die Lösung mit Hilfe der Formeln für die Fläche A und das Volumen V einer Pyramide bestimmen. Hier ist der Durchmesser (Diagonale des Basisquadrats) d und Höhe ist $d/\sqrt{8}$ zu allen Zeitpunkten.
Man kann A und V über Integration herleiten, oder Formeln aus der Formelsammlung mit Bezeichnungen wie in der Abbildung 6 verwenden.

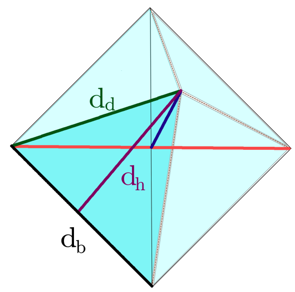


Abbildung 6: Skizze für die Lösung

Zunächst werden d_d, d_h, d_b jeweils über Pythagoras bestimmt. Man erhält

$$d_b = \sqrt{2(d/2)^2} = \frac{d}{\sqrt{2}}, d_d = \sqrt{(d/\sqrt{8})^2 + (d/2)^2} = d\sqrt{\frac{3}{8}}, d_h = \sqrt{d_d^2 - (d_b/2)^2} = \frac{d}{2}$$

und somit die Fläche als Vierfaches eines Flächendreiecks

$$A(d) = 4 d_h d_b / 2 = d^2/\sqrt{2}.$$

Das Volumen ergibt sich als Drittel der Grundfläche mal Höhe,

$$V(d) = \frac{1}{3} d_b^2 d/\sqrt{8} = \frac{d^3}{12\sqrt{2}}\,.$$

Setzt man die vorgegebenen Werte ein, errechnet sich

$$\bar{A}_1 = A_1(0) = d_1(0)^2/\sqrt{2} = 1600/\sqrt{2} nm^2,$$

$$\bar{V}_1 = V_1(0) = \frac{d_1(0)^3}{12\sqrt{2}} = 64000/(12\sqrt{2}) nm^3 \approx 3771 nm^3,$$

$$\bar{A}_2 = A_2(0) = d_2(0)^2/\sqrt{2} = 1225/\sqrt{2}nm^2,$$

$$\bar{V}_2 = V_2(0) = \frac{d_2(0)^3}{12\sqrt{2}} = 42875/(12\sqrt{2})nm^3 \approx 2526nm^3.$$

Nun sucht man ein t^* für welches gelten soll $V_1(t^*) = gV_2(t^*)$, oder in d ausgedrückt $d_1(t^*)^3 = gd_2(t^*)^3$. Gleichung (7) gibt

$$\begin{aligned} d_1(t)^2 &= ((Dt(\bar{d}_1^2 - \bar{d}_2^2))^{3/2} + \bar{d}_1^3)^{2/3}, \\ d_2(t)^2 &= (-(Dt(\bar{d}_1^2 - \bar{d}_2^2))^{3/2} + \bar{d}_2^3)^{2/3}. \end{aligned}$$

Nimmt man die Gleichungen hoch 3/2 und setzt sie in das entsprechende Verhältnis, erhält man

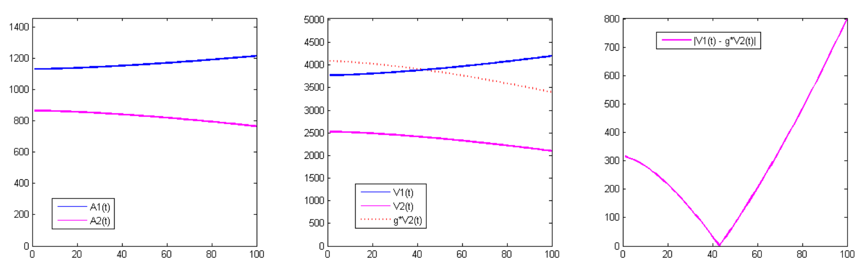
$$(Dt^*(\bar{d}_1^2 - \bar{d}_2^2))^{3/2} + \bar{d}_1^3 = g(-(Dt^*(\bar{d}_1^2 - \bar{d}_2^2))^{3/2} + \bar{d}_2^3) \quad .$$

Aufgelöst nach t^* erhält man

$$(t^*)^{3/2}(D(\bar{d}_1^2 - \bar{d}_2^2))^{3/2}(1+g) = g\bar{d}_2^3 - \bar{d}_1^3$$

$$\Rightarrow t^* = \frac{(g\bar{d}_2^3 - \bar{d}_1^3)^{2/3}}{D(\bar{d}_1^2 - \bar{d}_2^2)(1+g)^{2/3}} \approx 43.07min$$

Man kann den Verlauf auch plotten wie in der folgenden Abbildung und t^* ablesen.



16 Der zersägte Solarzellenwafer

Autoren: Annegret Glitzky, Matthias Liero

16.1 Aufgabe

Weihnachtswichtel Photonix hat vom Weihnachtsmann die Aufgabe bekommen, aus einem großen kreisförmigen Solarzellenwafer (Durchmesser 22cm, Höhe kann vernachlässigt werden) mehrere kleine Stücke zu Testzwecken herauszuschneiden. Dazu soll Photonix einen leistungsstarken Laser verwenden, der entlang einer geraden Kante schneiden kann (siehe Bild). Um Zeit zu spa-

ren, will Photonix so wenig Schnitte wie möglich machen. Die Größe der Teilstücke spielt hierbei keine Rolle. Aus technischen Gründen muss jeder Schnitt den äußeren Rand des Wafers genau zweimal schneiden.
Wie viele Schnitte braucht Photonix mindestens, um 50 Stücke herzustellen?

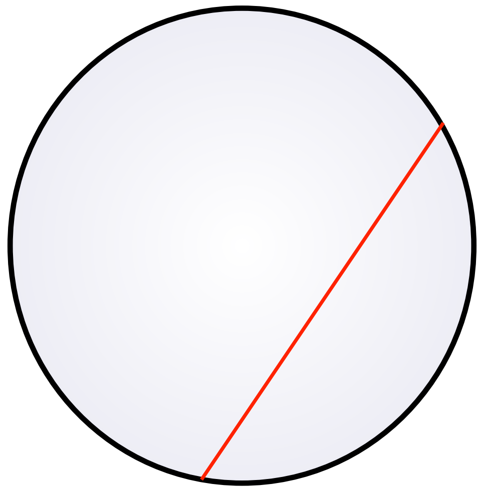


Abbildung 7: Laserschnitt durch Solarzellenwafer

Antwortmöglichkeiten:

1. 25
2. 9
3. 10
4. 16
5. 11
6. 23
7. 20
8. 15

9. 12
10. 18

Projektbezug:
Im Projekt D22 *Modellierung elektronischer Eigenschaften von Grenzschichten in Solarzellen* werden im Verbund mit Physikern neue mathematische Modelle für Solarzellen entwickelt. Damit sollen in Zukunft aufwendige und zeitintensive Experimente im Labor durch Computersimulationen ersetzt werden.

16.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 3.
Wir gehen induktiv vor: Der erste Schnitt ist beliebig und teilt den Wafer in zwei Flächen. Der nächste Schnitt ist auch noch ziemlich klar, der Wafer wird nun durch zwei Geraden in vier Teile zerlegt.
Wir überlegen uns weiter, dass wir mit dem nächsten Schnitt die maximal mögliche Anzahl von Teilflächen erzeugen, wenn wir die vorhandenen Schnitte so schneiden, dass kein Schnittpunkt mit anderen Schnittpunkten zusammenfällt und kein Schnitt parallel zu einem anderen Schnitt ist.
Dies lässt sich nun auf eine beliebige Anzahl von Schnitten fortsetzen. Wir sehen, dass bei $(n-1)$ geschnittenen Geraden n Teilgebiete für den neuen Schnitt betrachtet werden. Es entstehen beim n-ten Schnitt n neue Teilflächen. Bezeichnet S_n die Anzahl der Teilflächen, die wir mit unserem Verfahren nach n Schnitten erhalten, so gilt:

$$S_1 = 2, \qquad S_n = S_{n-1} + n$$

bzw.

$$S_n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}.$$

Somit ergibt sich: $S_9 = 46$ und $S_{10} = 56$. Man benötigt 10 Schnitte.

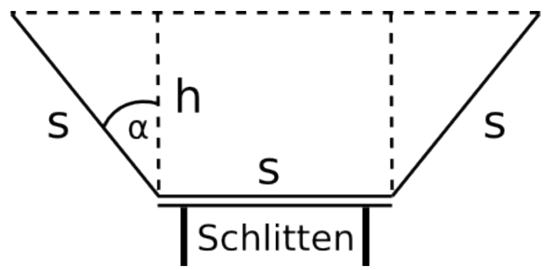
17 Transportschlitten

Autor: Martin Eigel

17.1 Aufgabe

Besonders kleine Geschenke bereiten dem Weihnachtsmann Kopfzerbrechen. In der Vergangenheit gingen gelegentlich kleine Päckchen beim Transport verloren, da die Auslieferung typischerweise in großer Eile und unter vollstem Einsatz der Rentiere durchgeführt werden muss. Die Kurven werden da schon mal etwas zu eng gefahren, die kleinen Geschenke rutschen wie wild hin und her und können vom vollbeladenen Schlitten fallen. Die Helfer des Weihnachtsmanns entschließen sich deshalb, einen speziellen Transportschlittenaufsatz für die kleine Fracht zu konstruieren. Ohne lange zu überlegen, flitzen sie zum

Baumarkt und erwerben drei gleich große Bretter der Länge ℓ und Breite s, um daraus einen Containeraufbau zusammenzuhämmern. Als sie sich sogleich ans Werk machen möchten, gibt Helfer Boldy zu bedenken, dass das Transportvolumen in Zeiten wachsender Bevölkerungs- und somit Geschenkezahl natürlich optimiert werden muss! Ein wenig Überlegung vor dem handwerklichen Eifer sei daher angeraten.



Welches maximale Transportvolumen lässt sich erreichen, wenn man voraussetzt, dass aus Sicherheitsgründen kein Geschenk über die obere sowie vordere und hintere Seitenfläche des Containers hinausragen darf? Die offenen Seitenflächen werden übrigens mit einer reißfesten Transportplane verschlossen.

Antwortmöglichkeiten:

1. $\frac{3}{4}s^2\ell$
2. $\frac{1}{4}s^2\ell$
3. $\sqrt{2}s^2\ell$
4. $\frac{3}{2}s^2\ell$
5. $\frac{2}{3}s^2\ell$
6. $\frac{7\sqrt{3}}{4}s^2\ell$
7. $\frac{3\sqrt{3}}{4}s^2\ell$
8. $\frac{3\sqrt{3}}{2}s^2\ell$
9. $\frac{3\sqrt{3}}{7}s^2\ell$
10. $\frac{\sqrt{2}}{3}s^2\ell$

17.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 7
Um ein möglichst großes Volumen zu erhalten, muss der Querschnitt A in Abhängigkeit vom Winkel $\alpha \in [0, \pi/2]$ maximiert werden. Dabei ist

$$A = sh + hs \sin \alpha = sh(1 + \sin \alpha).$$

Wegen $h = s \cos \alpha$ können wir A als von α abhängige Funktion schreiben

$$A(\alpha) = s^2 \cos \alpha (1 + \sin \alpha).$$

Wir betrachten zunächst die erste und zweite Ableitung von A,

$$\begin{aligned} A'(\alpha) &= s^2(-\sin \alpha + 1 - 2\sin^2 \alpha) \qquad \text{und} \\ A''(\alpha) &= s^2(-\cos \alpha - 4 \sin \alpha \cos \alpha). \end{aligned}$$

Dabei wurde $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ verwendet. Durch Substitution $x = \sin \alpha$ erhalten wir die quadratische Gleichung:

$$A'(x) = -2x^2 - x + 1 = 0.$$

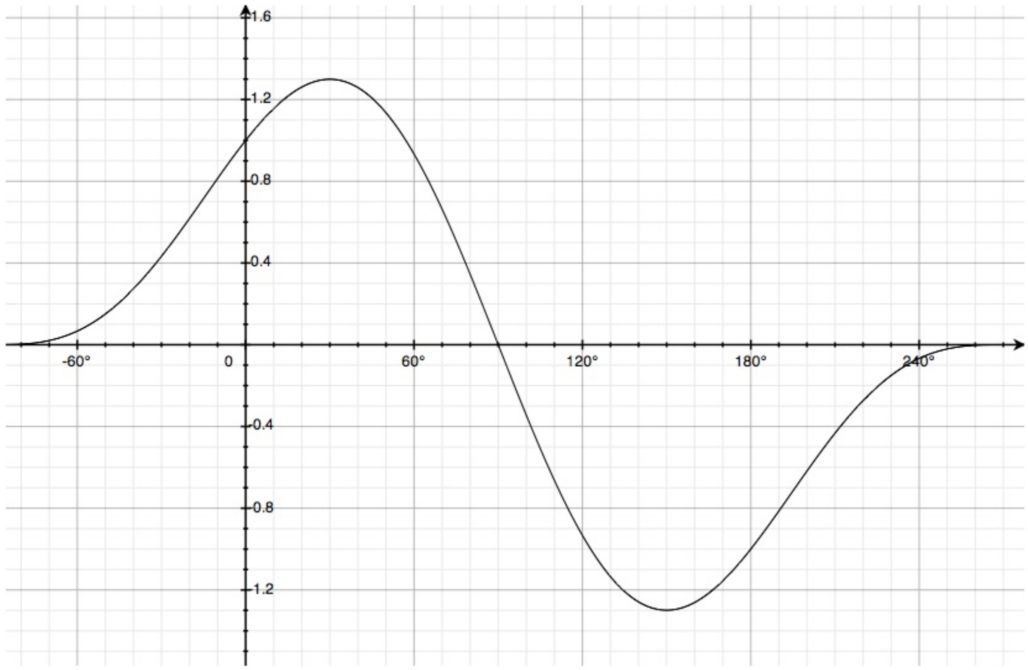
Diese hat die beiden Lösungen $x_1 = 1/2$ und $x_2 = -1$. Unter der oben gegebenen Einschränkung für α ergibt sich als einzige Lösung $\alpha_* = \pi/6$. Wegen $A''(\alpha_*) < 0$ wissen wir, dass wir die gesuchte Maximalstelle gefunden haben. Der Vollständigkeit halber überlegt man sich noch, dass $A(\alpha_*) > s^2 = A(0)$ ist. Das Maximum ist in dem vorausgesetzten Bereich also eindeutig und wird nicht für eine Kiste mit rechten Winkeln angenommen.
Das entsprechende maximale Volumen ergibt sich zu

$$V_* = Q(\alpha_*)\ell = \frac{3\sqrt{3}}{4} s^2 \ell.$$

Alternativ:
Für Schülerinnen und Schüler, die noch keine Ableitung beherrschen, bietet sich die Möglichkeit an, die Funktion

$$A(\alpha) = s^2 \cos \alpha (1 + \sin \alpha)$$

zu zeichnen und die Maximalstelle graphisch zu bestimmen.


1.6
1.2
0.8
0.4
-0.4
-0.8
-1.2
-60°
0
60°
120°
180°
240°

18 Drittelung eines Quadrats

Autor: Jens Griepentrog

18.1 Aufgabe

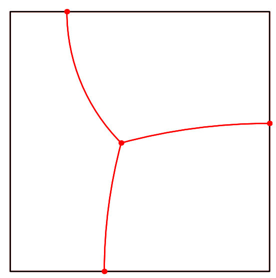
Der Weihnachtsbaumverkäufer wartet auf die Lieferung der von ihm bestellten Kiefern, Fichten und Tannen und hat für die Lagerung ein passendes Einheitsquadrat eingezäunten Landes angemietet. Da er die Bäume voneinander trennen will, stellt er sich folgende Frage: Wie groß ist eigentlich die minimale Länge an zusätzlichem Drahtzaun, die benötigt wird, um das quadratische Gelände in drei flächengleiche Stücke aufzuteilen?

Der Verkäufer grübelt eine ganze Weile, jedoch erfolglos. Plötzlich kommt der Weihnachtsmann um die Ecke, unterhält sich mit dem Verkäufer, überlegt einen kleinen Moment und findet die Lösung: „Ich werde Dir das Ergebnis nicht verraten, kann aber einige Hinweise zur Lösung des Rätsels geben!“

(1) Der zusätzliche Drahtzaun ist eine Konstruktion aus drei Teilstücken, welche rechtwinklig aus dem Rand des Quadrats ins Innere hineinlaufen und sich in einem Punkt treffen, wobei dort jeweils zwei benachbarte Linien einen Winkel von 120° einschließen.

(2) Jedes Teilstück ist entweder ein Kreisbogen oder eine gerade Strecke.

Der Verkäufer bedankt sich, sieht sich aber trotz dieser Einschränkungen noch immer einer riesigen Menge von zu prüfenden Möglichkeiten gegenüber. In einem ersten Versuch drittelt er das Einheitsquadrat wie folgt:



Der Weihnachtsmann bestätigt dem Verkäufer, auf dem richtigen Wege zu sein: „Das sieht gar nicht so schlecht aus, aber die optimale Konstruktion hat noch eine dritte Eigenschaft!“

(3) Die Anordnung des gesamten Zauns (bestehend aus den Randstücken und den hinzugefügten inneren Anteilen) ist spiegelsymmetrisch.

Wie groß ist die minimale Länge ℓ an zusätzlichem Drahtzaun, die benötigt wird, um das quadratische Gelände der Seitenlänge 1 in drei flächengleiche Stücke aufzuteilen?

Antwortmöglichkeiten:

1. $\ell = 1 + \frac{1}{3}\sqrt{4\pi - 3\sqrt{3}}$
2. $\ell = \frac{\pi}{2}$
3. $\ell = \sqrt{3}$

4. $\ell = \sqrt{\pi} + \frac{1}{12}$

5. $\ell = \frac{3}{2}$

6. $\ell = 2$

7. $\ell = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}$

8. $\ell = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\sqrt{3}$

9. $\ell = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{3}$

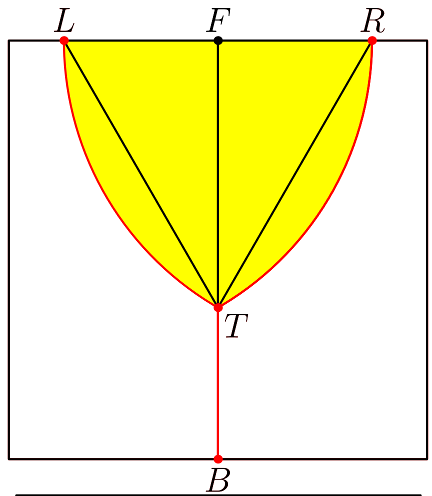
10. $\ell = \frac{5}{3}$

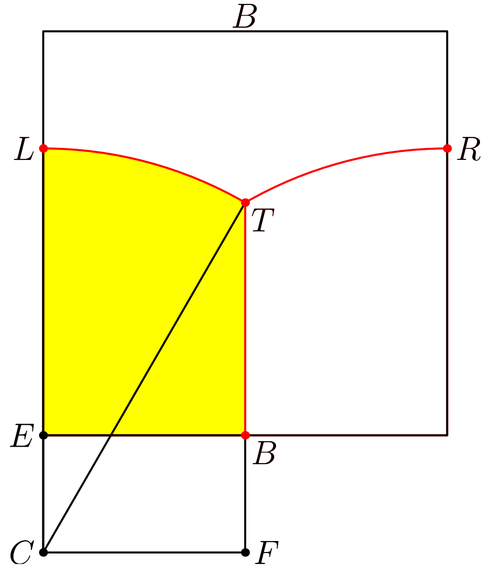
Projektbezug:
Die Aufgabe steht in direktem Zusammenhang mit Phasenseparationsprozessen, welche man in ternären Legierungen von Metallen beobachten kann. Betrachtet wird hierbei ein Gemisch von drei verschiedenen Teilchensorten, welche ein Quadrat vollständig ausfüllen und miteinander wechselwirken. Stoßen sich je zwei verschiedene Sorten ab und ziehen sich gleichartige Teilchen an, so findet eine Phasenseparation statt, also eine Entmischung der Teilchen in nahezu reine Phasen. Während dieses Prozesses entstehen energetisch immer günstigere Teilchenkonfigurationen, wobei auch die Länge der Grenzlinien zwischen den Phasen kleiner wird. Sind von jeder Sorte gleichviele Teilchen vorhanden, finden die Wechselwirkungen mit jeweils gleicher Stärke statt und startet man mit einer geeigneten Anfangskonfiguration der Teilchen, dann repräsentiert die Lösung der Aufgabe das Endstadium des Entmischungsprozesses.

18.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 8
Angenommen, unter den drei Teilstücken befänden sich zwei oder drei gerade Strecken. Dann würden zwei dieser Strecken parallel oder im rechten Winkel zueinander verlaufen, da sie rechtwinklig aus dem Rand des Quadrates austreten sollen. Damit könnten sie aber nicht in einem Winkel von 120° aufeinandertreffen. Also ist höchstens eines der drei Stücke eine gerade Strecke. Da aber keine spiegelsymmetrische Anordnung bei der Verwendung dreier Kreisbögen möglich ist, wenn sie in einem Punkt zusammentreffen sollen, besteht die Konstruktion aus einer geraden Strecke und zwei Kreisbögen. Aufgrund

des rechtwinkligen Austritts der Strecke aus dem Rand kann selbige nicht senkrecht zur Symmetrieachse liegen sondern nur auf ihr selbst. Aus demselben Grund halbiert die Symmetrieachse das Quadrat nicht diagonal sondern in achsenparalleler Richtung. Somit bleiben für die beiden Kreisbögen nur zwei alternative Anordnungen übrig:





Offenbar sind die beiden Möglichkeiten jeweils bis auf eine Drehung eindeutig bestimmt. Zur Lösung der Aufgabe verwenden wir die aus den Abbildungen ersichtlichen Bezeichnungen interessanter Punkte sowie Hervorhebungen bestimmter Linien und Flächen. Es soll jetzt berechnet werden, wie groß in beiden Fällen die Summe der Bogenlängen der drei roten Linien ist, wobei das Quadrat die Seitenlänge 1 und das farbig hervorgehobene Gebiet jeweils den Flächeninhalt $\frac{1}{3}$ hat.

Obere Abbildung
Da die beiden Kreisbögen im Tripelpunkt T unter einem Winkel von 120° zusammenstoßen und rechtwinklig aus dem Rand des Quadrates ins Innere hineinlaufen, müssen ihre Endpunkte L und R auf dem Rand des Quadrats zugleich auch die Mittelpunkte der zugrundeliegenden Kreise sein. Damit ist das Dreieck $\triangle RLT$ gleichseitig.

Wir berechnen jetzt den Radius $r = |\overline{LR}| = |\overline{TR}| = |\overline{LT}|$ der Kreisbögen: Der halbe Flächeninhalt des farbig hervorgehobenen Kelches ist gerade die Fläche des Kreissektors zwischen den Radien $\overline{LR}$ und $\overline{TR}$ vermindert um die Fläche des rechtwinkligen Dreiecks $\triangle RFT$. Daraus ergibt sich die Beziehung

$$\tfrac{1}{6} = \tfrac{\pi}{6}r^2 - \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{r}{2}\sqrt{3} \cdot \tfrac{r}{2} \quad \text{und damit} \quad r = \tfrac{2}{\sqrt{4\pi - 3\sqrt{3}}}$$

für den Radius r der Kreisbögen. Addiert man die Länge der geraden Strecke $\overline{BT}$ und der beiden Kreisbögen, so erhält man schließlich

$$\ell = 1 - \tfrac{r}{2}\sqrt{3} + \tfrac{2\pi}{3}r = 1 + \tfrac{1}{3}\sqrt{4\pi - 3\sqrt{3}}$$

für die gesuchte Summe ℓ der Bogenlängen der roten Linien in der linken Abbildung, was übrigens der Antwort 1 entspricht.

Untere Abbildung
Die beiden Kreisbögen im Tripelpunkt T schließen einen Winkel von 120° ein. Deshalb haben die beiden Winkel $\sphericalangle CTF = \sphericalangle TCL$ eine Größe von 30°. Somit ist der Radius $r = |\overline{CL}| = |\overline{CT}|$ der Kreisbögen doppelt so lang wie die Strecke $\overline{CF}$, er hat also die gleiche Länge $r = 1$ wie die Seite des Quadrats.

Wir berechnen die beiden Streckenlängen $d = |\overline{BF}|$ und $h = |\overline{BT}|$: Der Flächeninhalt des farbig hervorgehobenen Gebiets ist gleich der Summe der Fläche des Kreissektors zwischen den Radien $\overline{CL}$ und $\overline{CT}$ sowie der Fläche des rechtwinkligen Dreiecks $\triangle CFT$ vermindert um die Fläche des Rechtecks $\square\, CFBE$. Dies führt uns auf die Beziehung

$$\tfrac{1}{3} = \tfrac{\pi}{12}r^2 + \tfrac{1}{4}(d+h) - \tfrac{1}{2}d = \tfrac{\pi}{12} + \tfrac{1}{8}\sqrt{3} - \tfrac{1}{2}d$$

und somit zu $d = |\overline{BF}| = \frac{\pi}{6} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\sqrt{3}$ und $h = |\overline{BT}| = \frac{2}{3} - \frac{\pi}{6} + \frac{1}{4}\sqrt{3}$. Die Summe aus der Länge der roten Strecke $\overline{BT}$ und der beiden roten Kreisbögen liefert mit $\ell = h + \frac{\pi}{3}r = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\sqrt{3}$ einen kürzeren Drahtzaun als im Falle der linken Abbildung. Damit hat sich Antwort 8 als richtig herausgestellt.

19 Routenplanung

Autor: Martin Eigel

19.1 Aufgabe

Weihnachten stellt eine logistische Meisterleistung dar. Eine Unmenge von Geschenken will besorgt und an den richtigen Bestimmungsort transportiert werden. Für eine effiziente Organisation werden die Geschenke dafür zunächst in ein zentrales Lager gebracht, um dann nach Zielgebieten gruppiert zu werden.

Infolge des Klimawandels sind die altgedienten Routen leider nicht mehr so verlässlich, wie sie es in der Vergangenheit waren. Zwischenzeitliches Tauwetter und anschließende klirrende Kälte haben eine spiegelglatte und erstaunlicherweise kreisrunde Eisplatte hervorgebracht, über die gerade eine wichtige Verbindungsstraße zum Lager verläuft (siehe Zeichnung, Mittelpunkt $(4, 2)$, Radius $r = 2\text{km}$). Auf dem Eis ist jegliches Navigieren zwecklos und die Richtung, in der man das Eis betritt, wird aufgrund von Trägheit und verschwin-

dend geringer Reibung beibehalten, bis der Rand des Eises wieder erreicht ist.
Diese Eigenschaft möchte sich das eiligst gebildete Krisenteam zur Routenneuplanung zunutze machen. So soll eine Umleitungsstraße entstehen, die glatt[2] aus **P1** heraus und dann auf die Eisfläche führt, so dass der Schlitten bei **P2** wieder glatt in die bestehende Straße eingeleitet wird. Die Steigungen betragen dabei -2 an **P1** und -1 an **P2**. Da eine einfache Konstruktion gefunden werden soll, möchten die Planer ein Polynom von möglichst geringem Grad verwenden, um den Routenabschnitt von **P1** zur Eisfläche zu beschreiben.
Nach einiger wilder Rechnerei äußert ein besonders tollkühner Planer den Verdacht, dass die neue Strecke sogar kürzer als die alte ist. In welchem Verhältnis stehen neue und alte Route von **P1** nach **P2**, wenn für Letztere eine Länge von 7km angenommen wird?

Hinweis 1:
Sobald das allgemeine Polynom 3.Grades $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit dem Ansatz $P(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ ermittelt ist, soll eine Approximation der Länge des Graphen wie folgt durchgeführt werden: Das Intervall von **P1** bis zum Eis $[1, x_3]$ wird in vier gleichgroße Teilintervalle $I_1 := [1, 1+\delta]$, $I_2 := [1+\delta, 1+2\delta]$, $I_3 := [1+2\delta, 1+3\delta]$, $I_4 := [1+3\delta, 1+4\delta]$ mit $\delta = (x_3-1)/4$ zerlegt. Ermitteln Sie dann die ungefähre Länge des Graphen von P innerhalb jedes Intervalls, indem Sie die Länge der Sekante, die an den Intervallgrenzen durch den Graphen von P verläuft, bestimmen. Beispiel: Für das erste Intervall I_1 ist das also die Länge der Strecke zwischen $(1, P(1))$ und $(1+\delta, P(1+\delta))$.

Hinweis 2:
Die Steigung des Graphen von P an einer Stelle x berechnet sich für ein Polynom 3. Grades mit dem Ansatz: $P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
Das Verhältnis beträgt ungefähr:
Antwortmöglichkeiten:

1. $\frac{1}{2}$, der neue Weg ist etwa halb so lang
2. $\frac{2}{3}$, der Weg verkürzt sich um etwa ein Drittel

[2] *glatt* bedeutet, dass die zu konstruierende neue Straße an den entsprechenden Übergangsstellen die gleiche Steigung wie die Ursprungsstraße aufweist

3. 1, beide Wegen sind etwa gleich lang
4. $\frac{9}{10}$, der neue Weg ist um etwa 10% kürzer
5. $\frac{10}{9}$, der neue Weg ist um etwa 11% länger
6. $\frac{15}{12}$, der neue Weg ist um etwa 25% länger
7. $\frac{8}{10}$, der neue Weg ist um etwa 20% kürzer
8. $\frac{7}{10}$, der neue Weg ist um etwa 30% kürzer
9. $\frac{11}{9}$, der neue Weg ist um etwa 22% länger
10. $\frac{6}{10}$, der neue Weg ist um etwa 40% kürzer

Projektbezug:
Die *Approximation*, also die näherungsweise Darstellung von Funktionen, ist eine zentrale Aufgabe in der numerischen Mathematik. Soll die konstruierte Funktion durch vorgegebene Punkte verlaufen, spricht man von *Interpolation*. Eine grundlegende Methode zur Konstruktion guter Approximationen ist die stückweise Behandlung des Problems. In der Kalenderaufgabe konstruieren wir eine Funktion ausgehend vom Punkt **P1**, die gewisse Übergangsbedingungen erfüllen soll, in unserem Fall u.a. die Stetigkeit auch in der ersten Ableitung. Zusammengesetzte Funktionen mit vorgegebener Glattheit werden in der Theorie der *Splines* untersucht. Diese spielen bei der graphischen Modellierung eine wichtige Rolle. Das Prinzip der stückweisen Approximation von Funktionen findet zudem bei der näherungsweisen Lösung von *partiellen Differentialgleichungen*, die Naturvorgänge beschreiben, eine wichtige Anwendung.
Ein weiteres in der Numerik regelmäßig eingesetztes Vorgehen ist die *Approximation von Integralen* (auch Quadratur genannt), da Stammfunktionen oftmals nicht bekannt sind. Dabei kann man ähnlich vorgehen wie bei der näherungsweisen Bestimmung der Streckenlänge von **P1** zum Eis. Die exakte (aber nicht berechenbare) Länge ist übrigens gegeben durch $L(a,b) = \int_a^b \sqrt{1 + (P'(x))^2}\, dx$.

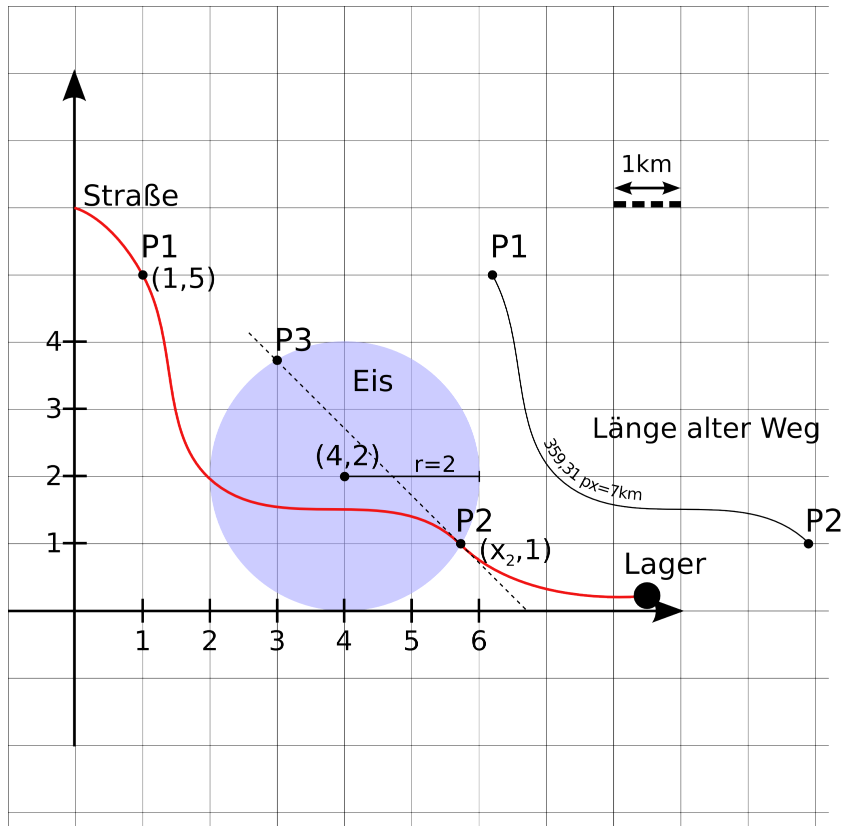


Abbildung 8: Illustration der Ausgangslage sowie der Geraden durch $\mathbf{P_3}$ und $\mathbf{P_2}$.

19.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 4

Zunächst bestimmen wir die fehlende Koordinate des Punktes **P2**. Das kann beispielsweise über die Parameterdarstellung des Kreises erfolgen. Für einen Kreis mit Mittelpunkt $(c_x, c_y) \in \mathbb{R}^2$ und Radius $r \geq 0$ gilt für Winkel $0 \leq \alpha \leq 2\pi$

$$x = c_x + r\cos\alpha \quad \text{und} \quad y = c_y + r\sin\alpha.$$

Über die y-Koordinate von $\mathbf{P_2}$ bestimmen wir zunächst den Winkel $\alpha = \arcsin(-\frac{1}{2}) = -\frac{\pi}{6}$. Somit folgt aus der ersten Gleichung die x-Koordinate von $\mathbf{P_2}$ zu $x = 4 + \sqrt{3}$. Es ist also $\mathbf{P_2} = (4 + \sqrt{3}, 1)$

Der Weg auf dem Eis verläuft somit entlang der Geraden

$$y = f(x) = 5 + \sqrt{3} - x, \tag{8}$$

die durch $\mathbf{P_2}$ verläuft und die Steigung $m = -1$ besitzt. Um den Punkt gegenüber von $\mathbf{P_2}$ zu finden, können wir uns zunächst der Koordinatendarstellung des Kreises bedienen, derzufolge gilt

$$(x - c_x)^2 + (y - c_y)^2 = r^2,$$

also konkret bei unserem Kreis

$$(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 2^2. \tag{9}$$

Durch Einsetzen der Geradengleichung (8) für y in (9) erhält man eine quadratische Gleichung

$$2x^2 - (14 + 2\sqrt{3})x + 24 + 6\sqrt{3} = 0,$$

die nach x mit den bekannten Schulmitteln aufzulösen ist. Als Lösungen ergeben sich $x_1 = 3$ und das bereits bekannte $x_2 = 4 + \sqrt{3}$. Durch Einsetzen von $x = x_1$ in (8) erhalten wir die benötigte y-Koordinate von $\mathbf{P_3} = (3, 2 + \sqrt{3})$, siehe Abbildung 8.
Als nächstes soll der neue Routenabschnitt zwischen $\mathbf{P_1}$ und $\mathbf{P_3}$ durch ein geeignetes Polynom P modelliert werden. Da P durch zwei Punkte gehen soll und dort jeweils eine bestimme Steigung, nämlich -2 und -1, aufweisen soll, machen wir den Ansatz entsprechend mit 4 Parametern

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Für die Ableitung von P nach x folgt

$$P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c.$$

Aus den gestellten Bedingungen folgt dann

$$P(1) = 5 = a + b + c + d \tag{10}$$
$$P(3) = 2 + \sqrt{3} = 27a + 9b + 3c + d \tag{11}$$
$$P'(1) = -2 = 3a + 2b + c \tag{12}$$
$$P'(3) - 1 = 27a + 6b + c. \tag{13}$$

Um die Koeffizienten a, b, c, d zu bestimmen, ziehen wir zunächst (12) von (13) ab und erhalten daraus

$$b = \frac{1}{4} - 6a. \tag{14}$$

Nun subtrahieren wir (11) von (10) und setzen b aus (14) ein. Daraus folgt

$$c = 11a + \frac{\sqrt{3} - 5}{2}. \tag{15}$$

Einsetzen von b und c in (10) und Auflösen nach a führt zu

$$a = -\frac{\sqrt{3}}{4}. \tag{16}$$

Das hiermit bestimmte a setzen wir in (14) und (15) ein, um

$$b = \frac{6\sqrt{3} + 1}{4} \quad \text{und} \quad c = -\frac{10 + 9\sqrt{3}}{4} \tag{17}$$

zu erhalten. Mit den bekannten a, b, c folgt durch Einsetzen in (10) nun noch

$$d = \sqrt{3} + \frac{29}{4}. \tag{18}$$

Schließlich ergibt sich daraus also

$$P(x) = -\frac{1}{4}\left(\sqrt{3}x^3 - (6\sqrt{3} + 1)x^2 + (9\sqrt{3} + 10)x - 4\sqrt{3} - 29\right). \tag{19}$$

Das Polynom P im Interval $[1, 3]$ und die durch f gegebene Gerade sind in Abbildung 9 dargestellt.
Als letzten Teil der Aufgabe soll die Länge der neuen Route näherungsweise bestimmt werden. Zwischen $\mathbf{P_3}$ und $\mathbf{P_2}$ ist dies einfach, da sich allgemein die Strecke zwischen zwei Punkten (x_1, y_2) und (x_2, y_2) nach Pythagoras zu $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ ergibt. Somit ist diese Strecke

$$\begin{aligned} L_{32} &= \sqrt{(1 + \sqrt{3})^2 + (1 + \sqrt{3})^2} \\ &= 1 + \sqrt{3} \\ &\approx 3.864. \end{aligned}$$

Die Strecke des Polynoms läßt sich bemerkenswerterweise nicht analytisch bestimmen. Allerdings ist die vorgeschlagene Näherung durch Quadratur bereits recht genau und zudem einfach zu berechnen. Gemäß der Intervalle $I_1, \ldots, I_4$ ist das Polynom P an lediglich fünf Punkten auszuwerten, siehe Abbildung 9. Wir erhalten

$$P(1) = 5, \quad P(\frac{3}{2}) = \frac{130 + 5\sqrt{3}}{32}, \quad P(2) = \frac{2\sqrt{3} + 13}{4},$$
$$P(\frac{5}{2}) = \frac{27\sqrt{3} + 82}{32}, \quad P(3) = \sqrt{3} + 2.$$

Die Länge der Sekanten bestimmen sich wie vorher durch Pythagoras, wofür wir jeweils die Differenz der x- und y-Koordinaten der Quadraturpunkte benötigen, die mit Δx und Δy bezeichnet werden sollen. Da die Intervalle die gleiche Länge haben, gilt $\Delta x = \frac{1}{2}$. Nach den obigen Auswertungen von P ergibt sich für die $\Delta_i y$ der Intervalle $I_i,\ i = 1 \ldots 4$,

$$\Delta_1 y = \frac{30 - 5\sqrt{3}}{32}, \quad \Delta_2 y = \frac{26 - 11\sqrt{3}}{32},$$
$$\Delta_3 y = \frac{22 - 11\sqrt{3}}{32}, \quad \Delta_4 y = \frac{18 - 5\sqrt{3}}{32}.$$

Die jeweiligen Strecken $L_i = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta_i y)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + (\Delta_i y)^2}$ berechnen sich näherungsweise zu

$$\mathcal{L}_1 \approx 0.8335, \quad L_2 \approx 0.5451, \quad \mathcal{L}_3 \approx 0.5084, \quad L_4 \approx 0.5790.$$

Damit erhalten wir die Approximation der Länge des Polynoms P zwischen $\mathbf{P_1}$ und $\mathbf{P_3}$

$$L_{13} = \sum_{i=1}^{4} L_i \approx 2.466.$$

Es sei erwähnt, dass sich mit ausgefeilteren adaptiven numerischen Verfahren eine genauere Approximation von L_{13} zu 2.485 ergibt. Unsere einfache Näherung ist also bereits ziemlich gut!
Die Länge L der neuen Route ergibt sich aus der Summe

$$L = L_{13} + L_{32} \approx 6.330.$$

Das Verhältnis aus neuer und alter Routenlänge ist schließlich $\frac{6.33}{7} \approx 0.9043$. Somit ist die neue Strecke etwa 10% kürzer als die alte.

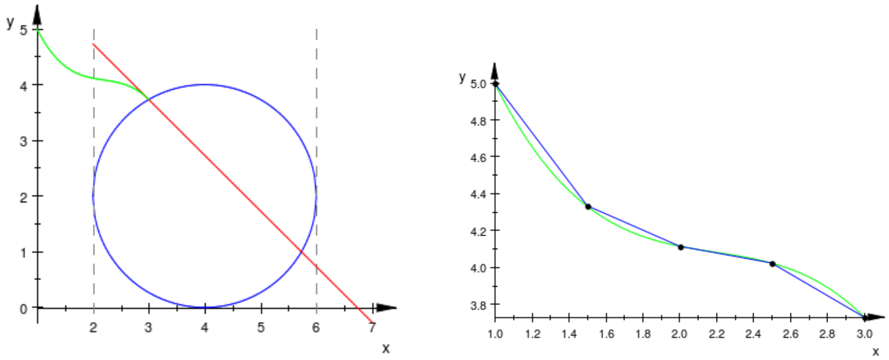


Abbildung 9: Durch Polynom P modellierte neue Route und Gerade über die kreisförmige Eisfläche (links), Quadraturpunkte und -sekanten zu P im Intervall $[1,3]$ (rechts).

Die Grafiken der Aufgabe wurden übrigens größtenteils mit der freien Zeichensoftware *Inkscape* erstellt, über die auch die approximative Bestimmung der Länge des Ursprungsweges erfolgte.

20 Keksmischung

Autor: Donat Wegner

20.1 Aufgabe

Ach, endlich hat der gute und mittlerweile schon etwas ergraute Weihnachtsmann das diesjährige Mammutprogramm überstanden und unzählige kleine und größere Kinder glücklich gemacht. Jetzt ist es an der Zeit, sich mit einer heißen Schokolade und einem groooßen Stück Stollen zurückzulehnen, um sich mit den Erinnerungen an all die fröhlichen Kinder zu entspannen. Aber auhh-weih-ahhh...., er hat ja komplett die armen Elfen vergessen, die so für ihn geschuftet haben, und denen er zum Dank etwas Leckeres backen wollte. Was mögen Elfen eigentlich am liebsten? Bekanntermaßen haben alle Elfen ein nahezu identisches Geschmacksempfinden, was ihm das Leben etwas vereinfacht. Außerdem erklärt ihm der verschmitzt grinsende Osterhase, dass er Eier, Zucker, Mandeln, viele Möhren (was, Möhren?), Mehl und Haselnüsse bräuchte. Er, der Osterhase, habe mit einer hochwissenschaftlichen Befragung der Elfen eine Geschmacksfunktion aufgestellt. Mit dieser Funktion kann man

ermitteln, was Elfen am meisten mögen.
Ihre allgemeine Gestalt sei sein Berufsgeheimnis! Wenn man aber die Masseanteile in Prozent von Eiern mit a, Zucker mit b, Mandeln mit c, Möhren mit d, Mehl mit e und von Haselnüssen mit f bezeichnet, dann sollte das zur Weihnachtszeit perfekte Rezept auf jeden Fall 8% Mehl und 20% Haselnüsse enthalten (dh. $e = 8$ und $f = 20$). Die dahingehend vereinfachte Geschmacksfunktion zur Weihnachtszeit sei nun:

$$
\begin{aligned}
&g(a, b, c, d) = \\
&\max(-37374 - 10a^2 - 20b^2 - 20c^2 - 30d^2 + 360a + 1000b + 1320c - 240d, \\
&\qquad -17677 - \frac{1}{72}b^4 - \frac{1}{80}c^4 + \tfrac{2}{3}b^3 + \tfrac{1}{2}c^3 - 10a^2 - 13b^2 - \tfrac{17}{2}c^2 - 13d^2 \\
&\qquad\qquad +560a + 224b + 178c + 752d - 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd)).
\end{aligned}
$$

Dabei entsprächen größere Werte von g größere Freude beim Naschen für die Elfen, meint der Osterhase. Außerdem solle der Weihnachtsmann der fertigen Mischung noch etwas geriebene Zitronenschale (unbehandelter Zitronen natürlich!), ein bißchen Zimt, ein Päckchen Vanillezucker und eine Prise Salz hinzugeben.
Ohhh Graus, dieser gemeine Osterhase! Warum muss das Leben immer so kompliziert sein? Ob ihn wohl der Osterhase nur an der Nase herumführt? Was muss der arme Weihnachtsmann beachten, wenn er das angeblich leckerste Rezept backen will? Hilf dem Weihnachtsmann! Ermittle den Prozentsatz, den Eier und Zucker zusammen im Teig ausmachen!

Antwortmöglichkeiten:

1. 34%. Es sind Nussecken.
2. 35%. Es werden Möhren-Lebkuchen.
3. 36%. Es ist ein Rüblikuchen.
4. 37%. Es sind Pfeffernüsse.
5. 38%. Es sind Madelmakronen.
6. 39%. Es werden Printen.
7. 40%. Es sind Zimtsterne.

8. 41%. Es sind Nussmakronen.
9. 42%. Es werden Mürbeteigplätzchen.
10. 43%. Es gibt Mandelplätzchen.

Hinweis: Bei dem Polynom 4. Ordnung hilft geeignetes Zusammenfassen. Dabei sollte man mit den Variablen anfangen, die wirklich in der 4. Potenz vorkommen. Zum Beispiel:

$$\begin{aligned}
&b^4 - 48b^3 + 860b^2 - 6910b + 20736 \\
&\quad = \; b^4 - 4 \cdot 12b^3 + (6 \cdot 12^2 - 4)b^2 - (4 \cdot 12^3 - 2)b + 12^4 \\
&\quad = \; (b-12)^4 - 4b^2 + 2b.
\end{aligned}$$

Projektbezug:
In unserem Forschungsbereich befassen wir uns mit sehr vielfältigen Anwendungen der Mathematischen Optimierung. Hierbei treten häufig Probleme auf, bei denen wir zunächst die mathematische Formulierung finden müssen. Zum Beispiel muss das Problem so gestellt werden, dass eine etwaige Lösung zulässig ist, d.h. dass sie sich in der Realität umsetzen lässt. Dies führt zum weiten Gebiet der restringierten Optimierungsaufgaben. Ein Beispiel hierfür stellt unsere Adventskalenderaufgabe dar.

20.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 7
Um dem armen Weihnachtsmann etwas auf die Sprünge zu helfen, schreiben wir g zuerst mal als

$$g(a,b,c,d) = \max(-37374 - 10g_1(a,b,c,d), -17677 - g_2(a,b,c,d))$$

mit

$$\begin{aligned}
g_1(a,b,c,d) &:= a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 3d^2 - 36a - 100b - 132c + 24d, \\
g_2(a,b,c,d) &:= \tfrac{1}{72}b^4 + \tfrac{1}{80}c^4 - \tfrac{2}{3}b^3 - \tfrac{1}{2}c^3 + 10a^2 + 13b^2 + \tfrac{17}{2}c^2 + 13d^2 \\
&\quad -560a - 224b - 178c - 752d \\
&\quad +2(ab + ac + ad + bc + bd + cd).
\end{aligned}$$

Da Mehl und Haselnüsse zusammen ja schon 28% des Teigs beanspruchen, muß der Rest die fehlenden 72% ausmachen. Dh. $a+b+c+d = 72$. Außerdem dürfen a, b, c, d natürlich nicht negativ werden. Wir such also das Maximum von g auf der Menge $M := \{(a, b, c, d) \,|\, a + b + c + d = 72,\ a, b, c, d \in [0, 72]\}$. Dazu bestimmen wir einzeln die Mimima von g_1 und g_2 und beginnen mit g_2, das man umformen kann zu

$$\begin{aligned}
&g_2(a, b, c, d) := \\
&\quad \tfrac{1}{72}(b^4 - 48b^3 + 13 \cdot 72b^2 - 224 \cdot 72b) + \tfrac{1}{80}(c^4 - 40c^3 + 17 \cdot 40c^2 - 178 \cdot 80c) \\
&\quad +10a^2 - 560a + 13d^2 - 752d + 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd).
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der binomischen Formeln kann der Weihnachtsmann folgendes anstellen:

$$\begin{aligned}
(b - 12)^4 &= b^4 - 4 \cdot 12b^3 + 6 \cdot 12^2b^2 - 4 \cdot 12^3b + 12^4, \\
(c - 10)^4 &= c^4 - 4 \cdot 10c^3 + 6 \cdot 10^2c^2 - 4 \cdot 10^3c + 10^4,
\end{aligned}$$

sodass er g_2 nun schreiben kann als

$$\begin{aligned}
&g_2(a, b, c, d) \\
&\quad = \tfrac{1}{72}((b - 12)^4 + 72b^2 - 9216b - 12^4) \\
&\qquad + \tfrac{1}{80}((c - 10)^4 + 80c^2 - 10240c - 10^4) \\
&\qquad +10a^2 - 560a + 13d^2 - 752d + 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd) \\
&\quad = \tfrac{1}{72}(b - 12)^4 + b^2 - 128b - 288 + \tfrac{1}{80}(c - 10)^4 + c^2 - 128c - 125 \\
&\qquad +10a^2 - 560a + 13d^2 - 752d + 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd).
\end{aligned}$$

Nach dem Zusammenfassen mit der binomischen Formel bleiben also $b^2 + c^2$ und $128b + 128c$ übrig. Spaltet man entsprechende Summanden von a und b ab, ergibt sich

$$\begin{aligned}
&g_2(a, b, c, d) \\
&\quad = \tfrac{1}{72}(b - 12)^4 + \tfrac{1}{80}(c - 10)^4 + 9a^2 - 432a + 12d^2 - 624d \\
&\qquad +(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - 128(a + b + c + d) \\
&\qquad +2(ab + ac + ad + bc + bd + cd) - 288 - 125 \\
&\quad = \tfrac{1}{72}(b - 12)^4 + \tfrac{1}{80}(c - 10)^4 + 9(a - 24)^2 + 12(d - 26)^2 \qquad (20) \\
&\qquad +(a + b + c + d - 64)^2 - 288 - 125 - 9 \cdot 24^2 - 12 \cdot 26^2 - 64^2.
\end{aligned}$$

Wir wissen, dass $a+b+c+d$ immer 72 ist und somit

$$(a+b+c+d-64)^2 - 288 - 125 - 9 \cdot 24^2 - 12 \cdot 26^2 - 64^2 = -17741. \quad (21)$$

Wählt der Weihnachtsmann nun $a = 24$, $b = 12$, $c = 10$, $d = 26$ (beachte, dass $24 + 12 + 10 + 26 = 72$), so werden alle übrigen Terme in g_2 zu 0. Das Minimum von g_2 ist also -17741 und wird genau an der Stelle $(24, 12, 10, 26)$ angenommen.

Um das Minimum von g_1 zu bestimmen, verfahren wir ähnlich:

$$\begin{aligned}
&g_1(a,b,c,d)\\
&= a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 3d^2 - 36a - 100b - 132c + 24d,\\
&= (a-18)^2 + 2(b-25)^2 + 2(c-33)^2 + 3(d+4)^2\\
&\quad -18^2 - 2 \cdot 25^2 - 2 \cdot 33^2 - 3 \cdot 4^2.\\
&= (a-18)^2 + 2(b-25)^2 + 2(c-33)^2 + 3(d+4)^2 - 3800 \qquad (22)
\end{aligned}$$

Auch hier können wir wieder die Minimumsstelle $(a,b,c,d) = (18, 25, 33, -4)$ und das Minimum -3800 von g_1 ablesen. Dabei gilt wieder $18{+}25{+}33{-}4 = 72$. „Aber, aber!“, sagt der Weihnachtsmann, „-4% Möhren ist schwer...“. Mist, da hat er Recht! Also liegt die Minimumsstelle von g_2 ausserhalb der erlaubten Menge M. Dh. im Inneren von M gibt es kein (lokales) Minimum und wir sollten einen Blick auf den Rand werfen. Damit $3(d+4)^2$ nicht zu groß wird, liegt die Wahl $d = 0$ nahe. „Na dann mal los!!!“, rufen die Elfen. Den armen knurren nämlich schon mächtig die Mägen...

Also schauen wir uns mal $d = 0$ an. Und da $a+b+c+d = 72$, können wir z.B. a ersetzen durch $72 - (b+c)$. Damit bekommen wir

$$\begin{aligned}
&h(b,c) := g_1(72-(b+c), b, c, 0)\\
&= [72-(b+c)]^2 - 36[72-(b+c)] + 2b^2 + 2c^2 - 100b - 132c\\
&= 72^2 - 144(b+c) + b^2 + 2bc + c^2 - 36 \cdot 72 + 36(b+c)\\
&\quad +2b^2 + 2c^2 - 100b - 132c\\
&= 3b^2 + 3c^2 + 2bc - 208b - 240c + 2592.
\end{aligned}$$

Um nun das Minimum von h zu ermitteln, könnte der Weihnachtsmann wagemutig seine fundierten Kenntnisse der Differentialrechnung ins Spiel bringen.

Aber etwas träge weiter auf dem Pfade der quadratischen Ergänzungen wandelnd, ließen sich auch folgende Umformungen tätigen:

$$\begin{aligned}
h(b,c) &= 3b^2+3c^2+2bc-208b-240c+2592\\
&= 3[c^2-2(\tfrac{240}{2\cdot 3}-\tfrac{b}{3})c]+3b^2-208b+2592\\
&= 3[c-(40-\tfrac{b}{3})]^2+\tfrac{8}{3}b^2-(208-2\cdot 40)b+2592-3\cdot 40^2\\
&= 3[c-(40-\tfrac{b}{3})]^2+\tfrac{8}{3}(b^2-\tfrac{128\cdot 3}{8})-2208\\
&= 3[c-(40-\tfrac{b}{3})]^2+\tfrac{8}{3}(b-24)^2-2208-\tfrac{24^2\cdot 8}{3}\\
&= 3[c-(40-\tfrac{b}{3})]^2+\tfrac{8}{3}(b-24)^2-3744.
\end{aligned}$$

Die beiden Quadrate werden genau dann Null, wenn $b=24$ und $c=40-\frac{b}{3}=32$ ist. Dann ist $a=72-b-c=16$. Somit nimmt g_1 auf dem Randstück $d=0$ das Minimum -3744 genau im Punkt $(a,b,c,d)=(16,24,32,0)$ an. Super! Würden wir z.B. $a=0$ wählen, so müßte nach Formel (22) nun $g_1(a,b,c,d)\geq 18^2-3800=-3476$ gelten. Das ist also größer als -3744. Analoges passiert, wenn man b oder c Null setzt. Also nimmt g_1 auf M genau im Punkte $(a,b,c,d)=(16,24,32,0)$ das Minimum -3744 an.

So, dann bleibt also nun noch die Wahl zwischen den Rüblikuchen ($a+b=24+12=36$) und den Zimsternen ($a+b=16+24=40$). Für den Rüblikuchen bekommen wir mit Formeln (21)

$$\begin{aligned}
g_1(24,12,10,26) &= 6^2+2\cdot 13^2+2\cdot 23^2+3\cdot 30^2-3800=332,\\
g(24,12,10,26) &= \max(-37374-10\cdot 332,-17677-(-17741))=64.
\end{aligned}$$

Also erreicht der Rüblikuchen 64 elfische Geschmackseinheiten, während wir mit Hilfe von (20) und (21)

$$\begin{aligned}
g_2(16,24,32,0) &= \tfrac{1}{72}12^4+\tfrac{1}{80}22^4+9\cdot 8^2+12\cdot 26^2-17741=-5836.8,\\
g(16,24,32,0) &= \max(-37374-10(-3744),-17677-(-5836.8))=66,
\end{aligned}$$

bekommen. Dh. die Zimtsterne erringen also ganze 66 Geschmackseinheiten. Endlich hat der Weihnachtsmann also das perfekte Rezept gefunden, es sind *tamteratam* die Zimtsterne. Und der verschmitzte Osterhase ist mächtig froh, dass sich der Weihnachtsmann (hoffentlich) nicht verrechnet hat. So bleiben nämlich alle Möhren übrig, die er nun als Beratungshonorar bekommt. Na dann, guten Appetit!

21 Glasfaserpost

Autor: Kersten Schmidt

21.1 Aufgabe

„Wieder alles zugeschneit!“, denkt der Weihnachtsmann. Bisher hat er ja alle Jahre die Wünsche aller Kinder rechtzeitig erhalten, was wirklich ein Wunder ist, bei all den falsch oder ungenügend adressierten Briefen. Dieses Jahr hat er ein Pilotprojekt gestartet. Also die Idee kam nicht von einem Piloten, sondern von der 43-jährigen Postangestelltin Barbara Pfeilschnell. Frau Pfeilschnell hätte im Frühjahr, beim Studium ihrer Computerzeitschrift, fast die Seite mit der Datenübertragung mittels Glasfaserkabel überblättert. Hat sie aber nicht! Nach intensiver Auseinandersetzung mit der Lektüre reift die Idee, eine Direktleitung zum Weihnachtsmann zu errichten. Auf diese Weise würden die Wünsche den Weihnachtsmann digital und mit Lichtgeschwindigkeit erreichen.

Nun ist das Projekt schon fortgeschritten und Frau Pfeilschnell testet die Leitung. Dafür sendet sie einen Puls mit rechteckigem Profil von f = 500 GHz, also jeweils eine Pikosekunde Signal und eine Pikosekunde kein Signal. Der Puls bewegt sich mit Lichtgeschwindigkeit in Glas, also mit c = 230.000 km/s. Die Länge eines Pulses ist somit 460 μm.
Bei der Einkoppelung des Signals in die Glasfaser wird ein Teil des Pulses reflektiert (rote Pulse an der ersten Senkrechten). Auch beim Auskoppeln an der zweiten Senkrechten wird der gleiche prozentuale Anteil, jetzt des bereits reduzierten Pulses, in Richtung Postamt reflektiert. Dieser Prozess wiederholt sich für jeden einzelnen Puls, ein Teil geht zurück in die Faser, der andere Teil tritt im Postamt aus der Glasfaser aus. Und so weiter und so fort. Die Zeitverzögerung ist so gering, dass Frau Pfeilschnell im Postamt faktisch einen Rechteckpuls mit einem Drittel der ursprünglichen Amplitude registriert. Sie schließt daraus, dass nur zwei Drittel beim Weihnachtsmann ankommen.
Ihr Testprogramm sieht nun vor, den in das Glasfaserkabel integrierten Laser zu aktivieren, der das Licht beim Durchgang verstärkt, egal aus welcher Richtung es kommt. Sie misst bei verschiedenen Verstärkerfaktoren verschiedene Anteile an zurückgestrahltem Licht.

Verstärkungsfaktor	Anteil zurückgestrahlten Lichtes	ankommendes Licht
1	1/3	2/3
1,1	0,363	?
1,2	0,396	?
1,3	0,432	?
?	?	3

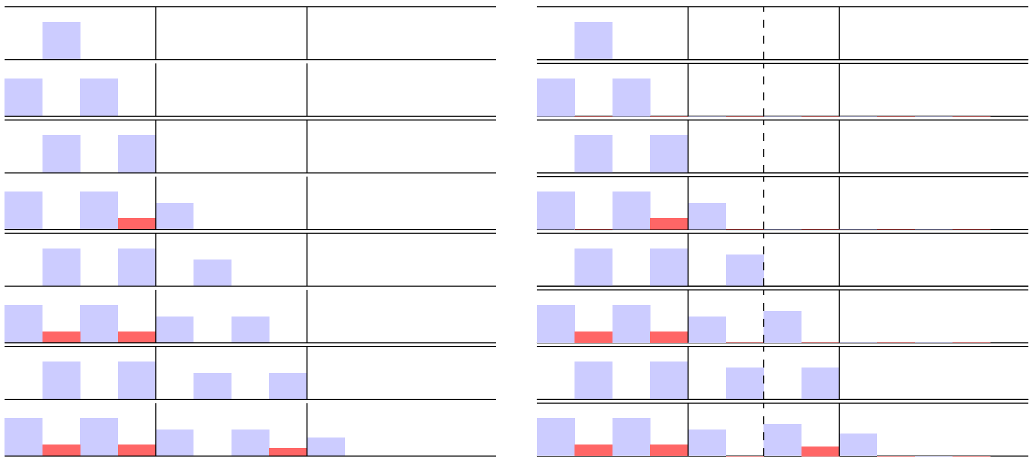
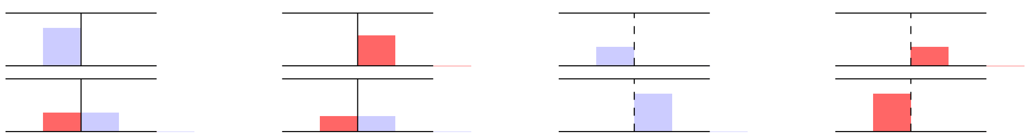


Abbildung 10: Illustration der Ausbreitung des Rechteckpulses. Die blauen Boxen bewegen sich nach rechts, während die roten Boxen sich nach links bewegen. An den zwei Senkrechten wird ein- bzw. ausgekoppelt, wobei das Signal hier, in diesem Beispiel, zu 30% reflektiert wird. In den Diagrammen auf der rechten Seite gibt es eine zusätzliche Verstärkung des Signals mit einem Laser, in diesem Beispiel auf das 1.20-fache.



(a) Puls von links kommt an Koppelstelle, und wird zum Teil reflektiert und zum Teil weitertransportiert.

(b) Puls von rechts wird zum Teil reflektiert, zum Teil weitertransportiert.

(c) Puls von links wird verstärkt.

(d) Puls von rechts wird verstärkt.

Abbildung 11: Illustration des Einkoppelns in die Glasfaser und die Verstärkung mittels Laser. Die blauen Boxen illustrieren Pulse, die sich nach rechts bewegen, während sich die roten Boxen nach links bewegen. Das Beispiel zeigt den Fall für eine Reflexion und Transmission je zur Hälfte der originalen Amplitude und eine Verstärkung auf das Doppelte.

Barbara Pfeilschnell überlegt, wie sie nun herausfindet, wie stark das Licht ist, das beim Weihnachtsmann ankommt. Viel wichtiger ist jedoch die Frage: Wie groß muss der Verstärkungsfaktor des Lasers sein, so dass das Signal beim

Weihnachtsmann dreimal so stark ankommt, wie es abgesendet wurde?

Antwortmöglichkeiten:

1. Verstärkungsfaktor 4,50.
2. Verstärkungsfaktor 4,00.
3. Verstärkungsfaktor 3,30.
4. Verstärkungsfaktor 3,20.
5. Verstärkungsfaktor 3,00.
6. Verstärkungsfaktor 2,55.
7. Verstärkungsfaktor 2,15.
8. Verstärkungsfaktor 2,00.
9. Verstärkungsfaktor 1,84.
10. Verstärkungsfaktor 1,60.

Projektbezug:
Die Ausbreitung von Wellen, also nicht nur von Licht, sondern auch von Schall oder elastischen Wellen, hat etliche Anwendungen in Natur und Technik. Ein Beispiel ist tatsächlich die optische Kommunikation. Mathematisch werden die Wellen durch Differentialgleichungen beschrieben, die numerisch und zum Teil analytisch gelöst werden können. Im Matheon-Projekt D26 beschäftigen wir uns mit der Wellenausbreitung in Photonenkristallen, das sind Halbleiter mit einer speziellen periodischen Löcherstruktur. Durch eine Wahl der Löcherstruktur können die Eigenschaften der Wellenausbreitung „maßgeschneidert“ werden.

21.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 5
In der Illustration ist der startende Puls zu sehen. Durch die (teilweise) Reflexion an der Grenzfläche zum Auskoppeln, kommt nach einiger Zeit gleichzeitig

ein neuer Puls von links mit dem zurückreflektierenden von rechts an der linken Grenzfläche an. Dadurch kommt zum eingekoppelten Anteil des neuen Pulses noch der reflektierte Anteil von rechts hinzu.
Also geht ab nun mehr Lichtintensität in die Glasfaser und auch mehr wird am anderen Grenzfläche reflektiert. Dadurch kommt auch mehr wieder links an, und noch mehr Lichtintensität bewegt sich nach rechts in die Glasfaser.
Wir haben bisher noch keine Verstärkung eingeführt, und die Lichtintensitäten in den Glasfasern werden nicht ins Unendliche ansteigen. Versuchen wir diesen Prozess mit Hilfe von Gleichungen zu beschreiben.
Die Intensität von links normieren wir auf 1. Der Reflexionskoeffizient an den beiden Grenzflächen sei R und der Transmissionskoeffizient $T = 1 - R$.
Sich nach links bewegende Pulse mit einer Intensität I_L^{II} erreichen in der mittleren Glasfaser die linke Grenzfläche. Dann setzt sich das sich im Anschluss nach links bewegende Licht zusammen aus dem reflektierten und dem durchgelassenen Licht von rechts:

$$I_L^I = R \cdot 1 + T \cdot I_L^{II} = T(I_L^{II} - 1) + 1. \tag{23}$$

Im Anschluss geht der Puls nach rechts in die Glasfaser

$$I_R^{II} = T \cdot 1 + R \cdot I_L^{II} = T + (1 - T)I_L^{II} \tag{24}$$

An der rechten Grenzfläche haben wir:

$$\begin{aligned} I_L^{II} &= R \cdot I_R^{II} = (1 - T) \cdot I_R^{II}, \\ I_R^{III} &= T \cdot I_R^{II}. \end{aligned}$$

Einsetzen von (24) in I_L^{II} gibt

$$I_L^{II} = (1 - T) \cdot \big(T + (1 - T)I_L^{II}\big)$$

bzw.

$$I_L^{II}(1 - (1 - T)^2) = I_L^{II}(2T - T^2) = I_L^{II}(2 - T)T = (1 - T)T$$

Somit ist

$$I_L^{II} - 1 = \frac{1 - T}{2 - T} - 1 = \frac{-1}{2 - T}.$$

Das Ergebnis setzen wir in (23) ein:

$$\frac{1}{3} = I_L^I = \frac{-T}{2-T} + 1 = \frac{2(1-T)}{2-T}.$$

Aufgelöst ergibt sich

$$T = \frac{4}{5}.$$

Nun betrachten wir das Einschalten des Lasers, wobei die Verstärkung V sei. Bisher hatten wir mit $V = 1$ gerechnet.
Die geänderten Gleichungen sind

$$I_R^{II} = V(T \cdot 1 + R \cdot I_L^{II}) = VT + V(1-T)I_L^{II},$$

wobei I_R^{II} die Intensität rechts vom Laser ist und I_L^{II} die links davon. An der rechten Grenzfläche haben wir

$$\begin{aligned} I_L^{II} &= VR \cdot I_R^{II} = V(1-T) \cdot I_R^{II}, \\ I_R^{III} &= T \cdot I_R^{II} = 3. \end{aligned}$$

Damit ist also

$$I_R^{II} = 3 \cdot \frac{5}{4} = \frac{15}{4}, \qquad\qquad I_L^{II} = \frac{1}{5} \cdot \frac{15}{4} \cdot V = \frac{3}{4}V$$

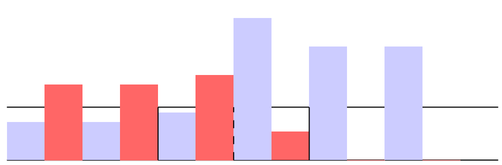
Damit haben wir eine Gleichung für V

$$\frac{15}{4} = \frac{4}{5}V + \frac{1}{5}V \cdot \frac{3}{4}V,$$

und somit

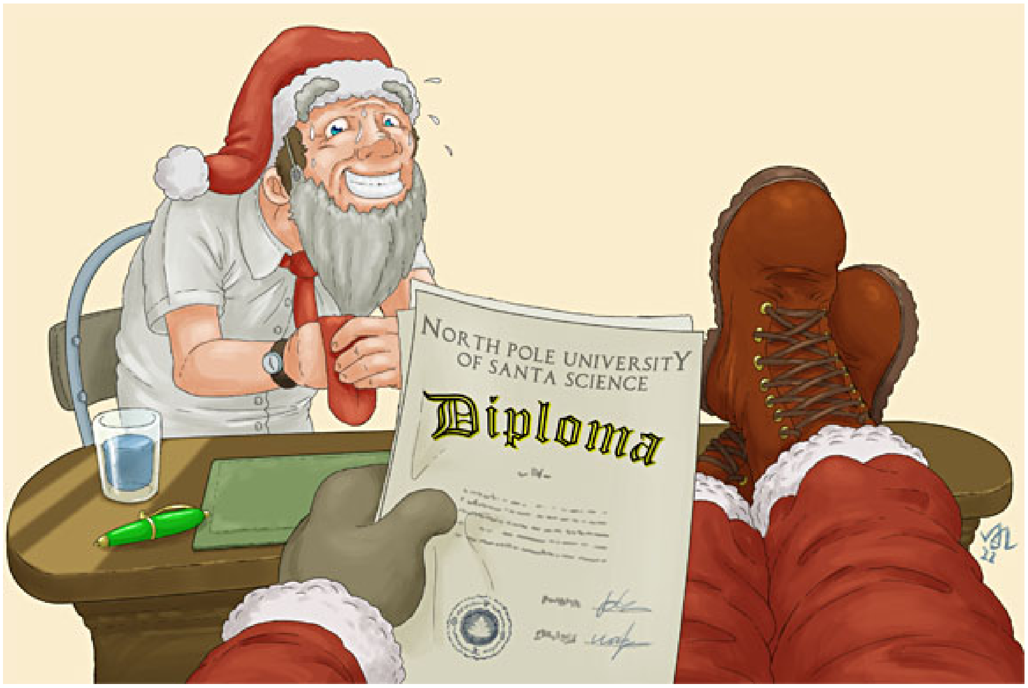
$$V^2 + \frac{16}{3}V - 25 = 0.$$

Die Lösungen sind $V = 3$ und $V = -\frac{25}{3}$. Die zweite Lösung ist laut Sachverhalt nicht möglich, da wir einen **verstärkenden** Laser haben. Das entspricht folgendem Bild.



22 Casting

Autor: Falk Ebert



22.1 Aufgabe

Es hat sich herumgesprochen, dass *Weihnachtsmann* ein ausgesprochen cooler Beruf ist: elf Monate Urlaub im Jahr, die Möglichkeit, kleine Wichtel herumzuschubsen, kleine Kinder zu erschrecken und Kekse und Milch gibt's noch dazu.
Tatsächlich ist es aber ein Knochenjob! Der richtige Weihnachtsmann hat die undankbare Aufgabe, aus einer Vielzahl von Bewerbungen diejenigen herauszusuchen, die sich als Regionalvertreter eignen. Zum Vorstellungsgespräch sind noch genau zehn Kandidaten eingeladen. Der erste kommt um Punkt 10 Uhr, der zweite um Punkt 11 Uhr, usw. und der letzte ist auf 19 Uhr Nordpolarzeit geplant. Die Gespräche mit den einzelnen Kandidaten beginnen auch frühestens zu den geplanten Zeitpunkten, keinesfalls eher. So sieht das die Richtlinie für Castings vor. Es kann natürlich dazu kommen, dass der Beginn sich etwas nach hinten verschiebt. Die Erfahrungen der letzten Jahre haben gezeigt, dass

kein Bewerbungsgespräch exakt eine Stunde dauert. Entweder, sie dauern eine halbe Stunde oder 90 Minuten – beides ist gleich wahrscheinlich. Die Dauer kann der Weihnachtsmann aber nicht selbst beeinflussen. Diese hängt immer von den Kandidaten ab.
Man kann davon ausgehen, dass alle Kandidaten pünktlich da sind und dass der Weihnachtsmann ohne Pause die Gespräche führt - vorausgesetzt, die jeweiligen Kandidaten sind schon da. (Es kann passieren, dass das letzte Gespräch sehr kurz war und der Zeitpunkt des nächsten Kandidaten noch nicht ran ist.)
Wie wahrscheinlich ist es, dass der Weihnachtsmann um Punkt 20 Uhr mit allen Vorstellungsgesprächen fertig ist?

Antwortmöglichkeiten:

1. Er wird sicher rechtzeitig fertig.
2. Die Wahrscheinlichkeit ist etwa $\frac{3}{4}$.
3. Die Wahrscheinlichkeit ist etwa $\frac{1}{2}$.
4. Die Wahrscheinlichkeit ist etwa $\frac{1}{4}$.
5. Die Wahrscheinlichkeit ist etwa $\frac{1}{6}$.
6. Die Wahrscheinlichkeit ist etwa $\frac{1}{8}$.
7. Die Wahrscheinlichkeit ist etwa $\frac{1}{12}$.
8. Die Wahrscheinlichkeit ist etwa $\frac{1}{42}$.
9. Die Wahrscheinlichkeit ist etwa $\frac{1}{216}$.
10. Die Wahrscheinlichkeit ist etwa $\frac{1}{1000}$.

22.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 4, alternative Lösung: 6
Wir betrachten die konkreten Dauern der Castings und stellen fest, dass sie entweder 30 Minuten weniger als eine Stunde oder 30 Minuten mehr als eine Stunde dauern. Das heißt, wir können statt in Minuten auch einfach in *Verspätungen* rechnen. Jedes Casting bringt entweder +1 Verspätung, wenn es länger dauert oder -1 Verspätung, wenn es schneller geht. Ausgehend von einer Verspätung von 0 um 10 Uhr, ist es um 11 Uhr möglich, dass entweder eine Verspätung von +1 entstanden ist, oder aber eine von -1.

Verspätung	-1	0	1
10:00		1	
	$\swarrow$		$\searrow$
11:00	1	0	1

Zu Beginn, um 10 Uhr gibt es nur eine Möglichkeit, wieviel Verspätung angesammelt werden kann, nämlich keine (0). Um 11 Uhr gibt es schon 2 Möglichkeiten und zwar -1 und +1. Da beide Möglichkeiten gleich wahrscheinlich sind, genügt es, zu zählen, wieviele Möglichkeiten es für jede Zahl von Verspätungen gibt. Bevor wir auf die gleiche Art und Weise von 11 Uhr zu 12 Uhr übergehen, müssen wir aber bedenken, dass sehr wohl positive Verspätungen angesammelt werden können (max. 2 um 12 Uhr) und dass auch Verspätungen wieder rausgeholt werden können. Allerdings ist eine negative Gesamtverspätung zu Beginn eines Castings nicht möglich, da der nächste Kandidat ja bestenfalls pünktlich anfängt und nicht schon vorher. Eine Verspätung von -1 wird also zu jeder vollen Stunde auf 0 angehoben.

Verspätung	-1	0	1
10:00		1	
	$\swarrow$		$\searrow$
11:00	(1)	$\rightarrow$1	1

Für den Zeitpunkt 12 Uhr gibt es jetzt die Möglichkeit, -1, 0, 1 oder 2 Verspätungen anzusammeln. Eine Verspätung von 0 lässt sich dabei auf 2 Arten erreichen: einmal, wenn von einer Gesamtverspätung von 0 ausgehend eine Verspätung von -1 hinzukommt, diese dann aber auf 0 angehoben wird, und zum anderen kann eine Gesamtverspätung von 1 um -1 auf 0 reduziert werden. Alle anderen Verspätungen können jeweils nur auf eine Art erreicht werden.

Verspätung	-1	0	1	
10:00		1		
11:00	(1)→	1	1	
12:00	(1)→	2	1	1

Eine analoge Tabelle können wir jetzt für jede volle Stunde aufstellen und erhalten damit auch die möglichen Verspätungen bis 20 Uhr.

Verspätung	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10:00		1										
11:00	(1) →	1	1									
12:00	(1) →	2	1	1								
13:00	(2) →	3	3	1	1							
14:00	(3) →	6	4	4	1	1						
15:00	(6) →	10	10	5	5	1	1					
16:00	(10) →	20	15	15	6	6	1	1				
17:00	(20) →	35	35	21	21	7	7	1	1			
18:00	(35) →	70	56	56	28	28	8	8	1	1		
19:00	(70) →	126	126	84	84	36	36	9	9	1	1	
20:00	(126)→	252	210	210	120	120	45	45	10	10	1	1

Hier ist jetzt erkennbar, dass es um 20 Uhr 252 von 1024 Möglichkeiten gibt, eine Verspätung von 0 (oder -1) zu haben. Und $\frac{252}{1024} \approx \frac{1}{4}$, also ist Antwort 4 richtig.

Man hätte übrigens bereits ab 15 Uhr aufhören können, alle Verspätungen, die größer sind als 5, mitzuzählen. Diese hätten auf keinen Fall wieder aufgeholt werden können. Gleiches gilt für Verspätungen größer 4 ab 16 Uhr usw. Das schöne an der vollständigen Tabelle ist nur, dass man eine Struktur erkennen kann. Die Einträge in jeder Zeile sind die Einträge wie im Pascal'schen Dreieck, allerdings der Größe nach absteigend geordnet. Das vereinfacht beispielsweise die Beantwortung der Frage, wieviele Möglichkeiten es für 0 Verspätung nach 20 Castings gibt, nämlich $\binom{20}{10} = 184\,756$. Die Wahrscheinlichkeit dass es dann zu keiner Verspätung kommt, ist $\binom{20}{10}/2^{20} \approx 0,176$.

Nachtrag: Nachdem begründete Unklarheiten bezüglich der Aufgabenstellung aufgetreten sind, wurde auch die Lösung akzeptiert, dass der Weihnachtsmann um Punkt 20 Uhr das letzte Casting beendet. Diese Möglichkeit ist nur dann gegeben, wenn das vorletzte Casting um 19:30 Uhr endet und das letzte eine Dauer von 30 Minuten hat. Die Wahrscheinlichkeit dafür lässt sich anhand der Tabelle leicht bestimmen. Das Ende des vorletzten Castings um 19:30 Uhr bedeutet eine Verspätung von $+1$ bei dem 19 Uhr Casting. Die Anzahl der Möglichkeiten dafür ist 126 (rot in der Tabelle markiert). Nur diese 126 Möglichkeiten führen zu einem *Abschluss* um *Punkt* 20 Uhr. Die entsprechende Wahrscheinlichkeit ist $\frac{126}{1024} \approx \frac{1}{8}$ und damit wird Antwort 6 auch als korrekt gewertet.

23 Kugelverpackung

Autor: Ralf Punkenburg

23.1 Aufgabe

Der Weihnachtsmann ist furchtbar verärgert, er will den Weihnachtsbaum schmücken, sitzt aber vor einem Scherbenhaufen! Viele der großßen, roten Kugeln sind zerbrochen - kein Wunder, die Wichtel haben sie ja beim Abbauen des Baums leider unverpackt in eine große Kiste gelegt.

Das muss sich ändern! Er ruft die Wichtel zusammen. „In diesem Jahr werden die Kugeln sorgfältig einzeln verpackt, wenn der Baum abgebaut wird!“ „Aber nach dem Fest ist das Verpackungsmaterial doch so knapp, wie sollen wir sie denn verpacken?“, fragt ein Wichtel.
Da tritt ein alter, grauhaariger Wichtel hervor und murmelt Unverständliches. Ein Wichtel ruft: „Das ist der Alte aus Griechenland, den hat noch keiner so richtig verstanden“.
Schließlich nimmt der Alte seinen Stock und zeichnet eine Figur in den Sand.

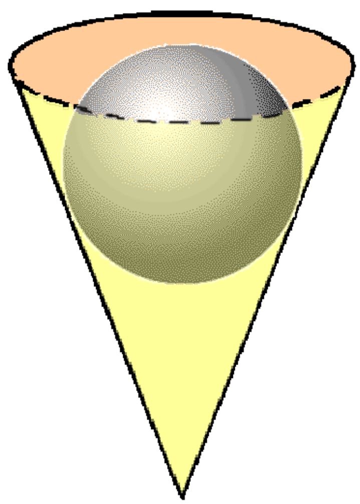


Abbildung 12: Figur im Sand

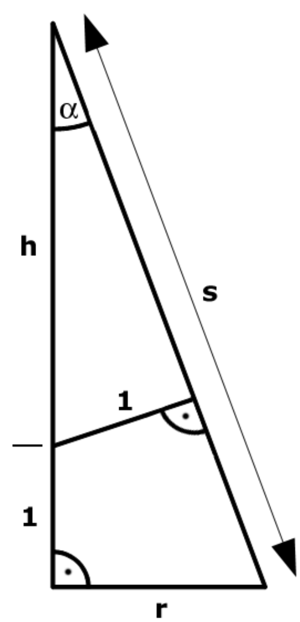
„Aha“, ruft der Weihnachtsmann, „die Kugeln sollen in einer kegelförmigen Schachtel mit rundem Deckel verpackt werden! So wird es gemacht! Achtet darauf, dass ihr möglichst wenig Papier dafür verbraucht!“
Wir groß ist die minimale Oberfläche(Mantel plus Deckel; Angabe in cm^2) eines Kegels, in dem man eine Kugel von 10 cm Radius unterbringen kann?
Antwortmöglichkeiten:

1. $500\pi\ cm^2$
2. $500\pi^2\ cm^2$
3. $600\pi\ cm^2$

4. $600\pi^2\ cm^2$
5. $700\pi\ cm^2$
6. $700\pi^2\ cm^2$
7. $800\pi\ cm^2$
8. $800\pi^2\ cm^2$
9. $900\pi\ cm^2$
10. $900\pi^2\ cm^2$

23.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 7
Der Radius der Kugel wird zunächst auf 1 gesetzt.



Mit den Bezeichnungen der Skizze erhält man:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha) &= \frac{1}{h}\\ \sin(\alpha) &= \frac{r}{s}\\ \cos(\alpha) &= \frac{h+1}{s}.\end{aligned}$$

Mit $r = \frac{s}{h}$ und

$$\left(\frac{h+1}{s}\right)^2 = \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \frac{1}{h^2} = \frac{h^2-1}{h^2}$$

folgt:

$$s^2 = \frac{h^2(h+1)^2}{h^2-1} = \frac{h^2(h+1)}{h-1}.$$

Für die Gesamtoberfläche des Kegels A(h) ergibt sich

$$\frac{A(h)}{\pi} = r^2 + rs = \frac{s^2}{h^2} + \frac{s^2}{h} = \frac{h+1}{h-1} + \frac{h(h+1)}{h-1} = \frac{(h+1)^2}{h-1}.$$

Mit

$$\frac{A'(h)}{\pi} = \frac{h^2-2h-3}{(h-1)^2}$$

erhält man ein Minimum für h=3 und $A(3) = 8\pi$. Für den Kugelradius 10 cm ist also $A_{min} = 800\pi\ cm^2$, was ergibt sich aufgrund des Strahlensatzes ergibt.

24 Wunschzettelcodierung

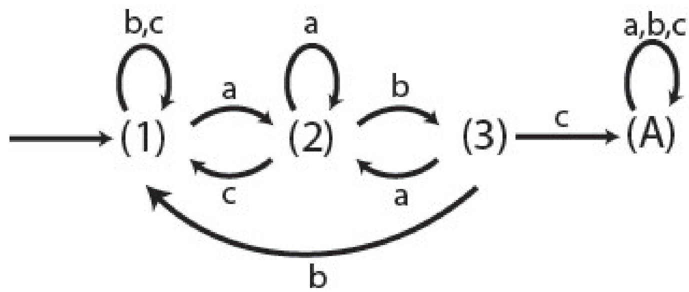
Autor: Moritz Schmitt

24.1 Aufgabe

Wenn Wunschzettel beim Weihnachtsmann eingehen, werden sie in einem ersten Schritt zwecks schnellerer Verarbeitung codiert. Die Codierung verwendet ausschließlich die Buchstaben 'a', 'b' und 'c'. Nach der Codierung ist ein Wunschzettel eine endlich lange Zeichenfolge und sieht beispielsweise so aus:

abbacccbbcaabcca

oder eben ähnlich, wobei das Codewort natürlich vom jeweiligen Wunschzettel abhängt. Im zweiten Schritt wird der Wunschzettel dann an eine Maschine übergeben, die ungültige und unmögliche Wunschzettel aussortiert. Die Arbeitsweise der Maschine ist in folgendem Schema dargestellt:



Dabei beginnt die Maschine im Zustand (1) und arbeitet Buchstabe für Buchstabe des Codewortes ab. Je nach Buchstabe folgt sie dem entsprechenden Pfeil. Ein kurzer codierter Wunschzettel der Form 'aacb' würde also in der Maschine folgende Zustände der Reihenfolge durchlaufen:

$$(1) \rightarrow (2) \rightarrow (2) \rightarrow (1) \rightarrow (1)$$

Wenn das Codewort durchlaufen wurde und sich die Maschine am Ende im Zustand (A) befindet, wird der Wunschzettel akzeptiert, ansonsten nicht. Welche der folgenden Bedingungen muss das Codewort erfüllen, damit es die Maschine akzeptiert?

Antwortmöglichkeiten:

1. Das Codewort muss mindestens dreimal den Buchstaben 'a' enthalten.
2. Das Codewort muss mindestens dreimal den Buchstaben 'b' enthalten.
3. Das Codewort muss mindestens dreimal den Buchstaben 'c' enthalten.

4. Das Codewort muss genau am Anfang 'abc' enthalten, dann beliebig weitergehen, 'abc' darf aber kein zweites mal vorkommen.
5. Das Codewort darf höchstens 20 Zeichen lang sein.
6. Das Codewort muss mindestens einmal die Folge 'abc' enthalten.
7. Das Codewort muss mindestens vier Zeichen lang sein.
8. Das Codewort darf nicht die Folge 'ac' enthalten.
9. Das Codewort muss genau einmal die Folge 'bc' enthalten.
10. Das Codewort muss mindestens einmal die Folge 'cba' enthalten.

24.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 6
Die Maschine akzeptiert ein Codewort genau dann, wenn das zusammenhängende Teilcodewort 'abc' irgendwo im Codewort mindestens einmal auftaucht. Ist dies nicht der Fall, springt die Maschine an einer Stelle wieder zurück. Das erklärt sich wie folgt:
Um von (3) in den Endzustand (A) zu gelangen, brauchen wir auf jeden Fall ein 'c'.
Das wiederum heisst, dass wir um von (2) nach (3) zu gelangen, ein 'b' benötigen. Jeder andere Buchstabe würde uns wieder auf Stufe (1) zurückbringen. Ein direkter Übergang von (1) nach (3) ist nicht möglich.
Um von Stufe (1) nach (2) zu gelangen, brauchen wir unbedingt ein 'a', alle weiteren Buchstaben bleiben bei (1). Betrachten wir noch den Fall, dass wir uns auf Stufe (2) befinden. Dann gibt es die Möglichkeit, nicht auf (3) weiterzuspringen, sondern durch ein weiteres 'a' auf Stufe (2) zu bleiben. Dann setzt sich die Codefolge letztendlich auch aus einem zusammenhängenden 'abc' zusammen.