

L.S. v. Borchers. 10/11/80

ACT 77

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

Memorandum 1980-14

september 1980

Signaalwoorden in bewijstaal

door

R.P. Nederpelt

Technische Hogeschool
Onderafdeling der Wiskunde
Postbus 513, 5600 MB Eindhoven
Nederland

Signaalwoorden in bewijstaal

door

R.P. Nederpelt

Inleiding

In "Bewijszinnen" (zie literatuurverwijzing [6]) hebben we de *zinsstructuur* van wiskundige bewijzen beschreven. We zullen, daarop aansluitend, in dit stuk de functie van een aantal *woorden* in bewijstaal analyseren. Deze woorden (of woordcombinaties), die we *bewijssignalen* noemen, spelen een belangrijke rol bij het overbrengen van informatie over de loop of de bouw van een bewijs.

Eerst bespreken we de functie van deze bewijssignalen en hun informatieve waarde (§ 1 en § 2). Vervolgens beschrijven we zeven klassen van bewijssignalen, met voorbeelden (§ 3). Daarna komen signaalwoorden met meervoudige functie aan de orde (§ 4) en het cumulatief gebruik van bewijssignalen (§ 5). Tenslotte bespreken we de taalkundige benoeming van bewijssignalen (§ 6) en we maken enige opmerkingen over samentrekking en samengestelde bewijszinnen (§ 7).

De signaalfunctie van een aantal woorden en woordcombinaties komt ook in de literatuur ter sprake, zij het op beperkte schaal. Zo geven Kalish en Montague in [4] lijsten van "stilistische varianten" voor bijvoorbeeld "als ... dan". In Anderson en Johnstone [1] (blz. 60-61) staan lijsten van "woorden die vaak wijzen op een conclusie" en "woorden die vaak premissen aanduiden".

1. De signaalfunctie van sommige woorden en woordcombinaties in bewijsteksten

In bewijsteksten^{*)} vindt men vaak een zinscombinatie van de gedaante: "X, dus Y". Het woordje "dus" geeft veel informatie over de plaatselijke structuur van het bewijs. De lezer wordt immers medegedeeld of eraan herinnerd dat X waar is (of als waar mag worden aangenomen), dat Y een gevolg is van X, en dat Y daarom ook waar is. Het woordje "dus" heeft klaarblijkelijk een sterke *signaalfunctie*. Het geeft in dit geval extra informatie, zowel over de beweringen X en Y afzonderlijk, als over het verband tussen X en Y.

Er zijn meer woorden en woordcombinaties die in bewijsteksten zo een signaalfunctie hebben. We noemen ze *bewijssignalen*. In dit stuk zullen we een groot aantal ervan bespreken en in een systeem onderbrengen. Het zal blijken dat bewijssignalen in het algemeen "buitenop" in een bewijszin voorkomen, wat wil zeggen dat ze verwijderd kunnen worden zonder dat de zinsstructuur aangetast wordt. Anders gezegd, een bewijszin met bewijssignalen heeft de volgende *karakteristieke eigenschap*:

Als men uit een bewijszin X alle bewijssignalen wegstreept, blijft er een bewijszin Y over^{**)}; daarbij is de betekenis van X samengesteld uit die van Y en die van de bewijssignalen uit X.

De bewijszin: "Omdat x groter is dan 3", bijvoorbeeld, kan men opvatten als combinatie van het bewijssignaal "omdat" en de bewijszin: "x is groter dan 3". Iets dergelijks geldt voor de bewijszin: "Definieer a als het kleinste priemgetal groter dan x", die men samengesteld kan denken uit het bewijssignaal "definieer ... als" (een *woordcombinatie*, in dit geval) en de bewijszin: "a is het kleinste priemgetal groter dan x".

Quantificerende delen van een zin horen essentieel bij de hele zin, zoals men bijvoorbeeld kan zien door een formalisering. Van "Voor alle reële getallen x geldt X" kunnen we maken: $\forall_{x \in \mathbb{R}} [X]$. In dit geval noemen we het quantificerende deel "Voor alle reële getallen x geldt" geen bewijssignaal.

*) Voor een omschrijving van de begrippen bewijstekst en bewijszin, zie "Bewijszinnen", [6], § 1 en § 2.

**)

1. Soms moet de zin Y licht gewijzigd worden, bijvoorbeeld om inversie ongedaan te maken. Zie de voorbeelden.
2. Een bewijszin waaruit alle signalen zijn verwijderd, levert in het algemeen op wat De Bruijn een *kernzin* noemt (zie [3], § 4).

2. De informatieve waarde van bewijssignalen

De informatie die een bewijssignaal overbrengt kan verschillende aspecten hebben. Voorop staat natuurlijk de expliciete *betekenis* van het woord (of de woordcombinatie) in kwestie. Deze betekenis noemen we ook wel de *semantische informatieinhoud*. Daarnaast heeft een signaal vaak ook een - impliciete - *syntactische informatieinhoud*: een signaal dat in een bewijszin voorkomt kan indirect iets meedelen over de syntactische bouw van de omgeving. Hierbij bestaan de volgende mogelijkheden:

- een signaal geeft informatie over de aard van de bewijszin waarin het voorkomt, en/of
- het verduidelijkt (een onderdeel van) de structuur van het bewijs.

Voorbeeld. Het signaal "onderstel" in een bewijszin vraagt de lezer, expliciet en semantisch (volgens de betekenis), om mee te gaan in een soort van wiskundig gedachtenexperiment. Maar ook drukt het, impliciet en syntactisch, uit dat de bewijszin in kwestie een onderstellende bewijszin^{*)} is. Bovendien wijst dit signaal erop (eveneens impliciet en syntactisch) dat een aantal op die zin volgende bewijszinnen een gemeenschappelijk structuurkenmerk heeft, namelijk dat ze geldig zijn "onder de onderstelling". (Buiten beschouwing laten we een andere syntactische eigenschap, namelijk dat door het maken van de onderstelling het bewijsdoel verandert; zie primair en secundair bewijsdoel, [6], § 3, IA.)

Wat uit dit voorbeeld al blijkt, kan men ook in het algemeen constateren. Een signaal heeft in de eerste plaats een expliciet betekenisaspect. Daarnaast heeft het twee impliciete, syntactische aspecten: een zinsbepalend aspect (het *zinsaspect*) en een structuurbepalend aspect (het *structuuraspect*). Het zinsaspect van een signaal legt vast van welke soort de bewijszin is waarin het voorkomt (waarbij we de indeling volgen van "Bewijszinnen", [6]). Het structuuraspect kan op drie zaken betrekking hebben:

- (a) het *verband* tussen twee bewijszinnen,
- (b) de *samenhang* in een bewijsdeel,
- (c) de *scheiding* van bewijsdelen.

*) Zie "Bewijszinnen", [6], § 3, IA.

In geval (a) onderscheiden we *direct verband* (tussen twee min of meer naburige bewijszinnen), en *indirect verband* (over grotere afstand).

In de volgende paragraaf zullen we de hier genoemde begrippen met voorbeelden toelichten.

3. Classificatie van bewijssignalen

We geven in deze paragraaf een overzicht van een groot aantal bewijssignalen. We brengen de signalen onder in zeven klassen. De indeling is gebaseerd op criteria die een duidelijke scheiding teweegbrengen, zodat er weinig twijfelgevallen overblijven. Het zal blijken dat bij sommige klassen het zinsaspect meer op de voorgrond treedt, bij andere het structuuraspect.

De signalen uit de klassen I en III (onderstelling- en definitie-signalen) kunnen in een gegeven bewijstekst niet geschrapt worden zonder het bewijs wezenlijk aan te tasten, omdat ze noodzakelijke informatie geven over de structuur; ze zijn *essentieel*. De signalen uit de andere klassen zijn in principe weglaatbaar.

We merken op dat sommige bewijssignalen in meer dan één functie kunnen optreden, zodat soms de context uitsluitend moet geven over de juiste betekenis. Op deze meervoudige functie komen we terug in de volgende paragraaf.

I. Onderstellingsignalen

Een *onderstellingsignaal* leidt een onderstellende bewijszin in. De onderstelling kan zowel van de eerste als van de tweede soort zijn (zie [6], § 3, IA). In de gebruikelijke manier van uitdrukken wordt echter niet altijd duidelijk gemaakt op welk van de twee soorten het signaal betrekking heeft. Zo kan de x in de zin "Zij $x > 0$ " verwijzen naar een eerder bekende x (waarvoor de zin een onderstelling van de eerste soort wordt, een "echte" onderstelling), maar ook kan het zijn dat de bewijszin zelf de x introduceert (zodat de zin een onderstelling van de tweede soort is, een introductie).

Het onderstellingssignaal "als" werkt in principe op korte afstand. Wanneer op de tekst "Als X , dan Y .", die afgesloten wordt door een punt, een nieuwe zin Z volgt, ligt het logisch voor de hand dat de conditie X niet meer van toepassing is in zin Z . Toch blijkt men hier in de praktijk vaak

anders over te denken. Zo kan een tekst van de volgende vorm geschreven worden: "Als X, dan Y. Dus Z, zodat U. Hieruit volgt V." waarin bedoeld is dat conditie X geldig is tot en met V.

Het hier beschreven gebruik beperkt zich niet tot "als". Voor alle onderstellingsignalen kan gelden dat het "logisch geïmpliceerde" bereik van de onderstelling korter is dan het werkelijk bedoelde. Dit is ook van toepassing voor condities zonder zichtbaar signaal ("Was $x > 5$, ...")^{*)} en voor signalen van de tweede soort. We merken op dat dit gebruik zich nog verder uitstrekt: ook variabelen die geïntroduceerd worden in uitgeschreven quantoren kunnen verder reiken dan men op het eerste gezicht denkt. Voorbeeld: "Bij iedere $\epsilon > 0$ is er een N zodat X. Stel dat $a_m < \epsilon$. Dan ...". De geïntroduceerde ϵ blijkt ook ná de eerste zinsafsluitende punt nog in leven.

We willen dit algemene gebruik niet bestrijden. Wel merken we op, dat de verwarring minder groot wordt als de onderstelling in een aparte zin wordt geschreven; bijvoorbeeld: "Onderstel X." in plaats van "Als X, ...".

Voorbeelden van onderstellingsignalen

onderstel (dat), veronderstel (dat), stel, zij (... willekeurig), neem aan dat, als, indien, wanneer, in het geval (dat), mits, laat (... zijn), laat gegeven zijn dat, kies, neem, voor
--

zinsaspect: een onderstellings signaal bepaalt een onderstellende zin.

structuuraspect: het signaal geeft impliciet informatie over de samenhang in een bewijsdeel, omdat het een onderstellende-bewijszinsgroep inleidt (zie [6], § 4, I).

plaats: het signaal staat vooraan in de onderstellende zin.

N.B.: "onderstel" en "veronderstel" worden (bijna) uitsluitend voor onderstellingen van de eerste soort gebruikt, "laat ... zijn", "neem" en "kies" voor onderstellingen van de tweede soort.

^{*)} Dit "woordloze" onderstellings signaal is niet in de lijst opgenomen. Het wordt besproken aan het eind van deze paragraaf.

II. Koppelsignalen

Een signaal uit deze klasse wordt in een tekst opgenomen om aan te duiden dat twee afgeleide bewijszinnen (zie [6], § 3, IB) X en Y *logisch gekoppeld* zijn, wat wil zeggen dat de zin X optreedt als argument voor de zin Y. Laten we deze situatie weergeven met $X \rightarrow Y$. Bij de koppelsignalen in deze subparagraaf staan de zinnen X en Y (zo goed als) naast elkaar in het bewijs; we zullen spreken van een *directe koppeling* (of *directe schakeling*; zie weer [6], § 3, IB). Het structuuraspect van signalen in deze klasse heeft dus te maken met het verband tussen bewijszinnen, om precies te zijn: met het verband op korte afstand.

Er zijn drie mogelijkheden: het signaal s kan voorkomen in X, in Y, of verspreid over X en Y. In het eerste geval noemen we het signaal *redengevend*. Voorbeeld: "Omdat $x > 3$, is $x > 0$ "; signaal: "omdat". In de twee andere gevallen spreken we van *gevolgtrekkende signalen*^{*)}. Voorbeelden: " $x > 3$, dus $x > 0$ ", resp. "uit $x > 3$ volgt dat $x > 0$ ", met signalen: "dus", resp. "uit ... volgt dat".

Bij gevolgtrekkende signalen vindt men altijd de normale (*rechte*) volgorde van X en Y in de bewijstekst: $X \rightarrow Y$. Zie de laatste twee voorbeelden. Bij redengevende signalen mag de volgorde vaak ook worden omgekeerd (*inverse* volgorde: $Y \rightarrow X$); soms is de invertering zelfs verplicht. Voorbeelden (redengevende signalen):

- rechte of inverse volgorde bij "omdat": "Omdat $x > 3$, is $x > 0$ ", resp. "Er geldt $x > 0$, omdat $x > 3$ ";
- verplicht inverse volgorde bij "want": "Er geldt $x > 0$, want $x > 3$ ".

Bij een directe koppeling $X \rightarrow Y$ kunnen de zinnen X en Y elk voor zich ook nog aan andere bewijszinnen gekoppeld zijn. Zo zal de zin X meestal zelf ook een afgeleide zin zijn die gekoppeld is aan een voorafgaande zin: $Z \rightarrow \dots \rightarrow X \rightarrow Y$. Als Z en X niet naast elkaar staan, spreken we van een *indirecte koppeling* van Z en X. Dit laatste zal vaak het geval zijn als er in X een redengevend koppelsignaal (bijv. "omdat") staat.

*) Bij nauwkeurig taalgebruik zou een term als "reden-aankondigend" resp. "gevolgtrekking-aankondigend" de voorkeur verdienen. Met onze kortere termen volgen we de taalkundigen, die "want" een redengevend voegwoord noemen, en "dus" (als voegwoord) concluderend. Zie bijv. [7]. (Beide voegwoorden worden ook wel *oorzakelijk* genoemd.)

We merken op dat het in het algemeen ongeoorloofd is om bij een directe koppeling $X \rightarrow Y$ een redengevend koppelsignaal in X en een gevolgtrekkend signaal in Y te gebruiken. Voorbeeld: de zin "Omdat U, is dus V" heeft waarschijnlijk één signaal teveel.

Een redengevend verband kan men ook met symbolen i.p.v. woorden aangeven. Voorbeelden: "X:Y", "X(Y)" of, met nadruk: "X(Y!)", alle in plaats van "X, want Y". We zullen deze symbolen niet in onze lijst van koppelsignalen opnemen. Er kan een gevolgtrekkend verband bestaan ook zonder dat er enig signaal of symbool zichtbaar is. Voorbeeld: met "X.Y.Z." kan bedoeld zijn: "X, dus Y, zodat Z".

De redengevende bewijssignalen die in de hierna gegeven lijst staan opgesomd vanaf "wegens", voldoen op het eerste gezicht niet aan de karakteristieke eigenschap (beschreven in § 1): als men bijvoorbeeld het signaal "wegens" wegstreept uit de bewijszin "wegens stelling 5", blijft er geen bewijszin over. Toch ligt het voor de hand om deze bewijszin op te vatten als te zijn samengesteld uit het bewijssignaal "wegens" en een andere bewijszin, bijvoorbeeld: "stelling 5 geldt". We wijzen in dit verband ook op de grote overeenkomst die taalkundigen zien tussen het voorzetsel "wegens" en het voegwoord "omdat" (zie ook § 6); dit laatste signaal voldoet wél direct aan de karakteristieke eigenschap.

Alle combinaties met "het feit dat" hebben we gemakshalve niet in de lijst opgenomen: "wegens het feit dat", "op grond van het feit dat", enz.

Voorbeelden van redengevende koppelsignalen

want, omdat, aangezien, daar, immers, namelijk, wegens, vanwege, op grond van, tengevolge van, volgens, uit, krachtens, door, hetgeen volgt uit, lettend op, met behulp van

zinsaspect: een redengevend signaal bepaalt een afgeleide zin.

structuuraspect: het signaal legt verband tussen bewijszinnen, door een directe koppeling in rechte of inverse volgorde.

plaats: het signaal staat meestal vooraan in een zin.

N.B.: inverse volgorde verplicht bij: want, immers, namelijk, hetgeen volgt uit.

Voorbeelden van gevolgtrekkende koppelsignalen

dus, daarom, derhalve, bijgevolg, zodat, zodoende, met als gevolg dat, dat wil zeggen dat, ofwel, hieruit volgt dat, hieruit blijkt dat, dit houdt in dat, dit betekent dat, we mogen concluderen dat, blijkbaar, dan, dan geldt dat, dit geeft:, nu

zinsaspect: een gevolgtrekkend signaal bepaalt een afgeleide zin.

structuuraspect: het signaal legt verband tussen bewijszinnen, door een directe koppeling in rechte volgorde.

plaats: het signaal staat meestal vooraan in een gevolgtrekkende zin.

III. Definitiesignalen

Een *definitiesignaal* leidt een definiërende bewijszin (zie [6], § 3, IC) in. Een definitie Z (bijvoorbeeld: "Definieer x als A") bestaat uit drie delen: het *gedefinieerde deel* x, het *definiërende deel* A en het definitie-signaal s (in het voorbeeld: "definieer ... als"). Men kan x en A opvatten als twee delen van de zin: "x is A", waardoor men Z samengesteld kan denken uit het signaal s en de bewijszin: "x is A". Hierdoor voldoet Z aan de karakteristieke eigenschap die we beschreven in § 1.

Men drukt het definitie karakter van een bewijssignaal vaak uit door als definitiesignaal een koppelwerkwoord te gebruiken: "X heet Y", "X wordt Y", of eenvoudig: "X is Y". Soms gebruikt men woorden ("stel", "laat", "zij") die ook een onderstelling kunnen aankondigen. Het lijkt verstandig om de laatstgenoemde woorden in definities te vermijden.

Men kan, zoals De Bruijn liet zien, verschillende soorten definities onderscheiden: naams-, substantief-, adjectief- en zinsdefinities (zie [3]). Sommige definitiesignalen worden bij voorkeur gebruikt voor een van de vier soorten definities. Zo wijst "neem", "kies", "we noteren (... als)", "duidt men aan met" of "stel" meestal op een naamsdefinitie, "heet" of "noemt men" wordt vaak (niet altijd) gebruikt voor een substantief- of adjectiefdefinitie.

Bij zinsdefinities vindt men een definitiesignaal meestal verdeeld over twee bewijszinnen. Voorbeeld: "We noemen een natuurlijk getal ongelijk aan 1 een priemgetal, als het geen echte delers heeft"; definitiesignaal: "we noemen ... als", eerste bewijszin: "een natuurlijk getal (is) ongelijk aan 1", tweede bewijszin: "het (natuurlijk getal) heeft geen echte delers".

Bij het geven van definities maakt men soms gebruik van lange omschrijvingen: "We beschouwen de verzameling V , bestaande uit ...". We merken op dat een definitie ook met behulp van een bijstelling gegeven kan worden. Voorbeeld: met de zin "Blijkbaar is a , het kleinste element van V , groter dan 10" kan bedoeld zijn de zinscombinatie: "Definieer a als het kleinste element van V . Blijkbaar is a groter dan 10".

Over het structuuraspect van een definitiesignaal valt weinig te zeggen. Soms heeft een definitie duidelijk een onderbrekende functie in de bewijsgang, maar andere keren is een definitie organisch opgenomen in een keten van bewijszinnen.

Het definitiesymbool ":@" zullen we niet in de lijst van definitiesignalen opnemen.

Voorbeelden van definitiesignalen

definieer ... als, neem, kies, heet, is, wordt, noemt men, we noteren (... als), we construeren (... als), duidt men aan met, we geven ... aan met, beschouw, terwijl, waarbij, stel, laat (... zijn), zij, als, we noemen ... als, heet ... als

zinsaspect: een definitiesignaal bepaalt een definiërende zin.

structuuraspect: vaag; het signaal heeft in sommige gevallen een onderbrekende functie, en brengt dan een scheiding van bewijsdelen teweeg.

plaats: het signaal kan vooraan in een definiërende zin staan, of halverwege.

IV. Onderbreeksignalen

Een signaal uit deze klasse heeft steeds een scheidende functie in een tekst: de gedachtenlijn wordt op de plaats van het signaal onderbroken, om plaats te maken voor een nieuwe. Voorbeeld: "X. Voorts Y"; het onderbreeksignaal is hier: "voorts".

Een niet te verwaarlozen aspect van het gebruik van onderbreeksignalen is, dat elke suggestie van een gevolgtrekkend of redengevend verband wordt vermeden.

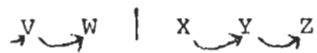
Gedachtenlijnen worden vaak uitgedrukt door een rij gekoppelde zinnen. In een voorbeeld laten we zien hoe men in een tekst een patroon van gedachtenlijnen kan weergeven, door gebruik te maken van koppel- en onderbreek-

signalen. We beschouwen het volgende tekstfragment, bestaande uit vijf bewijszinnen, V t/m Z:

V W X Y
"Dan is $x > 0$, dus $e^x > 1$. Ook is $e^{-x} < 1$, zodat $e^x - e^{-x} > 0$.

Z
Hieruit volgt dat $\sinh x$ positief is."

De bewijssignalen suggereren hier een aantal koppelingen en onderbrekingen, die als volgt schematisch zijn weer te geven:



We zien in dit schema twee gedachtenlijnen, met een scheidingspunt na zin W. (Merk op dat een goede verstaander in dit geval ook nog logische koppelingen zal aanbrengen tussen V en X, resp. W en Y. Deze koppelingen blijken echter niet uit het woordgebruik.)

We zullen alleen die signalen onderbreeksignalen noemen die de onderbreking van de gedachtenlijn als hoofdfunctie hebben. Andere signalen, zoals redengevende signalen, definitiesignalen, onderstellingsignalen of groepeer-signalen (zie verderop), kunnen ook een onderbrekende functie hebben, maar dat is dan een secundaire functie.

In de onderstaande lijst vinden we een aantal signalen met een modale bijfunctie, bijv. "maar", "hoewel" en "toch". Naar onze mening is hun hoofdfunctie echter de onderbreking van de gedachtenlijn, zodat we ze niet bij de modale signalen (§ 3, VII) onderbrengen.

Signalen als "anderzijds" en "omgekeerd" brengen we niet hier onder, maar bij de groepeer-signalen, op grond van hun hoofdfunctie (zie § 3, V).

Voorbeelden van onderbreeksignalen

bovendien, ook, tevens, nu, er geldt, voorts, verder, daarnaast, daarentegen, maar, echter, doch, hoewel, ofschoon, terwijl, toch, we merken op dat, intussen

zinsaspect: een onderbreeksignaal staat meestal in een afgeleide zin, soms ook in een definiërende, onderstellende of toelichtende zin.

structuuraspect: het signaal brengt een scheiding aan tussen twee bewijsdelen.

plaats: het signaal staat meestal vooraan in de bewijszin die volgt op het scheidingspunt.

N.B.: Een aantal van de genoemde woorden kan ook op een andere plaats in de zin staan. In dat geval hebben ze meestal geen onderbrekende functie. Voorbeeld: "p is een priemgetal, dus geldt ook dat $p > 1$ ". Het woord "ook" is hier geen onderbreeksignaal.

V. Groepeersignalen

Signalen uit deze klasse hebben als hoofdfunctie dat ze informatie geven over de structuur van een zeker tekstfragment: een groepeersignaal wordt gebruikt om aan te geven dat een stuk tekst uit een aantal opvolgende, intern samenhangende zinsgroepen is opgebouwd. Als men bijvoorbeeld in een tekst achtereenvolgens de groepeersignalen "eerst", "vervolgens" en "ten-slotte" aantreft, dan zal dit deel van de tekst, naar men mag aannemen, uiteenvallen in drie zinsgroepen. Elk van die zinsgroepen zal een karakteristiek kenmerk hebben, dat verband houdt met de driedeling.

Een aantal van de woorden die we onder de groepeersignalen rekenen, treedt ook op in de functie van onderbreeksignaal. Het hangt van de omstandigheden af of we zo een signaal als groepeersignaal of als onderbreeksignaal benoemen.

Er zijn ook woorden die weliswaar een groepeerende functie hebben, maar niet als hoofdfunctie. Alle onderstellingssignalen kunnen bijvoorbeeld in een groepeerende rol optreden, zoals bij de zogenaamde gevalonderscheiding (zie bijv. [5], 5.5). Het zal duidelijk zijn dat we ze desondanks niet tot de groepeersignalen rekenen.

Voorbeelden van groepeersignalen

eerst, enerzijds, aan de ene kant, vervolgens, nu, hierna, daarna, voorts, verder, tenslotte, omgekeerd, anderzijds, aan de andere kant

zinsaspect: een groepeersignaal kan in elke soort bewijszin optreden.

structuuraspect: het signaal suggereert dat een fragment van de bewijstekst uiteenvalt in opvolgende delen, die elk inwendig samenhangen.

plaats: het signaal staat aan het begin van één zo'n deel.

VI. Commentaarsignalen

Een commentaarsignaal leidt een toelichtende zin in (zie [6], § 3, II). Het is mogelijk om sommige commentaarsignalen nader te omschrijven, volgens dezelfde indeling als gegeven in [6], § 3, II; bijvoorbeeld:

- "analoog": vervangend commentaarsignaal, met bepaling van wijze;
- "het is triviaal dat": vervangend, met bepaling van graad;
- "we moeten alleen nog bewijzen dat": vooruitlopend, met bepaling van bewijsdoel.

De lijst van commentaarsignalen bestaat voornamelijk uit woordcombinaties en maakt een enigszins amorfe indruk.

Voorbeelden van commentaarsignalen

we bewijzen dat, we zullen laten zien dat, we moeten laten zien dat, analoog, op dezelfde manier, evenzo, zonder moeite, het is triviaal dat, het is niet moeilijk in te zien dat, we passen toe dat, men kan bewijzen dat, we moeten nog bewijzen dat, zonder beperking der algemeenheid geldt, we beperken ons tot het geval dat, het is voldoende om aan te tonen dat, we brengen in herinnering dat, nu, met het oog hierop, met dit doel, hiertoe

zinsaspect: een commentaarsignaal leidt een toelichtende zin in.

structuuraspect: het signaal geeft soms een suggestie over de samenhang in een bewijsdeel (dit is in het bijzonder het geval bij een vervangend signaal, met bepaling van wijze).

plaats: meestal vooraan in de toelichtende zin.

VII. Modale signalen

Als men zegt dat een woord een modaal karakter heeft, dan wordt bedoeld dat het woord iets uitdrukt van de persoonlijke opvatting van de schrijver over de verhouding tussen de inhoud van de zin en de werkelijkheid. Een typisch voorbeeld is het modale bijwoord "misschien".

In wiskundige bewijsteksten komen weinig modale woorden voor, omdat de persoonlijke mening in een bewijs nauwelijks van betekenis is. En als er al een modaal bijwoord wordt gebruikt, dan treedt dit meestal op in een gevolgtrekking, waarin het om stilistische redenen is opgenomen; het geeft dan

niet werkelijk uitdrukking aan de opvatting van de schrijver. Een persoonlijke opvatting is immers te bestrijden, en in een bewijs wil men juist onweerlegbare redeneringen geven.

Onder dit voorbehoud valt er toch iets voor te zeggen om "zeker", "blijkbaar" en "stellig" tot modale signalen te bestempelen, waar we misschien ook "inderdaad" en "immers" aan toe moeten voegen. Deze woorden geven in het algemeen, behalve een zekere nadruk, een persoonlijk karakter aan een zin. Voorbeeld: "Hieruit volgt dat p inderdaad het kleinste priemgetal is met de eigenschap A".

We hebben al eerder laten zien dat sommige signalen een modale bijfunctie hebben, zoals de onderbreeksignalen "maar" en "hoewel". Ook sommige commentaarsignalen, vooral die met bepaling van graad, hebben een modale bijfunctie; voorbeeld: "het is niet moeilijk in te zien dat".

Over het zinsaspect en het structuuraspect valt bij modale signalen weinig te zeggen. De plaats in de bewijszin is niet vast.

Opmerking

Soms kan een zin een signaal geven, zonder dat er een bepaald signaalwoord in voorkomt (of een daarvoor in de plaats tredend symbool).

Een zin kan ten eerste een signaal bevatten dat alleen tot uitdrukking komt in de woordvolgorde. Voorbeeld: "Is x een reëel getal groter dan 0, dan ...". Hier treedt in de bewijszin voor de komma *inversie* op (persoonsvorm vóór onderwerp), veroorzaakt door het conditionele karakter van de zin. Dit deel kan immers geparafraseerd worden tot: "Als x een reëel getal groter dan 0 is", waaruit volgt dat de inversie in dit geval een *onderstellingsignaal* is.

Ten tweede kan een zin een signaal verbergen in het gebruikte *tempus*: verleden tijd in een onderstellende zin geeft vaak aan, dat men een onmogelijkheid onderstelt. Deze situatie komt voor bij een bewijs uit het ongerijmde. Het bewijsdoel is dan een tegenspraak. Voorbeeld: "Stel dat x kleiner dan 0 was, dan ...". De afgeleide zinnen die volgen op zo een onderstelling en die bij het bewijs uit het ongerijmde horen, staan meestal ook in de verleden tijd.

Door die verleden tijd wordt een *irrealis* uitgedrukt. Omdat op zo een manier de mening van de schrijver wordt uitgedrukt ("we redeneren onder een

irreële onderstelling"), heeft deze irrealis een modaal karakter; we zullen dit tempus-signaal daarom tot de *modale* signalen rekenen.

We zullen in beide gevallen ook wel spreken van *woordloze signalen*. Beide vormen van woordloze signalen hebben als zinsaspect, dat ze in onderstellende, afgeleide en toelichtende zinnen kunnen voorkomen. Het structuuraspect is alleen van belang bij het modale woordloze signaal, omdat het gebruik van de verleden tijd er een duidelijke aanwijzing voor is dat de "irreële" onderstelling nog niet weerlegd is.

4. Signaalwoorden met meervoudige functie

In de vorige paragraaf is al gebleken, dat een aantal signaalwoorden in verschillende functies gebruikt kan worden. Voorbeelden zijn:

- stel, zij, laat (... zijn), neem, kies, als, indien: onderstellings-
signaal of definitiesignaal;
- voorts, verder: onderbreeksignaal, groepeeringsignaal.

Het valt op, dat de taalgebruiker in deze gevallen toch op andere wijze in staat is om aanwijzingen te geven over de bedoelde functie van een signaalwoord. Bij signalen die zowel in de functie van onderstellingsignaal als in die van definitiesignaal kunnen voorkomen, geeft bijvoorbeeld de aard van het lidwoord vaak een suggestie. Zo staat in de zin: "Laat T de limiet van (T_n) zijn" (bepaald lidwoord) waarschijnlijk de definitie van T uitgedrukt, terwijl men mag aannemen dat de zin: "Laat x een element van A zijn" (onbepaald lidwoord) een onderstelling van de tweede soort is. Zie ook [2], deel 8. Er bestaan overigens geen taalmiddelen die in de genoemde situaties ondubbelzinnig uitsluitel geven.

We besluiten deze paragraaf met enige opmerkingen over het woordje "nu", dat in vele rollen kan optreden. Het heeft niet steeds een uitgesproken signaalfunctie; soms is het zelfs moeilijk uit te maken of we "nu" signaalwoord moeten noemen of niet.

In de volgende voorbeelden is het twijfelachtig of "nu" als signaal moet worden opgevat:

- "zodat we nu mogen constateren" (bijwoord);
- "Nu we bewezen hebben dat ..." (voegwoord).

We geven vervolgens een aantal voorbeelden van het gebruik van "nu" in signaalpositie:

- "Nu a groter is dan 0 , ..." (redengevend signaal);
- "Stel $0 < a < 1$. Nu is $a^2 - a$ negatief." (gevolgtrekkend signaal);
- "dus als a groter is dan 1 , is $a^2 - a$ positief. Stel nu $a < 0$." (onderbreeksignaal; overgang naar nieuw bewijsdeel);
- in het eerste lid van een gevalonderscheiding: "Is nu f' overal positief, dan ..." of in het tweede lid: "Stel eerst Stel nu ..." *) (in beide gevallen: groepeeringsignaal);
- "Nu kunnen we twee gevallen onderscheiden: $a > p$ of $a < q$." (commentaar-signaal of onderbreeksignaal).

Opmerking terzijde. Het woord "nu" kan, wat zijn betekenis betreft, vele nuances hebben. We noemen er enkele:

- "nu" kan betekenen: zoals valt na te gaan op grond van het voorafgaande; zoals bekend mag worden verondersteld: "Nu is $[0,1]$ compact, ...";
- "nu" kan verwijzen naar het recente verleden: "De functie f is nu gedefinieerd voor ...";
- het kan de overgang naar een bijzonder geval inleiden: "Wanneer we nu λ zo kiezen, dat ..."; of het kan betekenen: in dit speciale geval: "Bij deze keuze van λ is er nu een punt c ...";
- "nu" kan een tegenstelling inleiden: "Nu geldt (echter) eveneens, dat ...".

5. Opeenstapeling van bewijssignalen

Het is heel goed mogelijk dat er verscheidene bewijssignalen tegelijk in één bewijszin voorkomen. Meestal bestaat er dan tussen die signalen onderling een hiërarchie van belangrijkheid. In de bewijszin: "Stel eerst $x > 0$ ", bijvoorbeeld, heeft het signaal "eerst" een hogere prioriteit dan "stel". We kunnen dit aantonen door de volgende parafrase te maken: "Wat we (nu) het

*) Het woord "nu" suggereert hier bovendien, dat de eerste onderstelling geacht wordt niet langer geldig te zijn.

eerste doen, is de onderstelling maken dat x groter is dan 0". Daarentegen is het hier duidelijk niet de bedoeling om te zeggen: "We onderstellen dat het eerst zo is dat x groter is dan 0". Als we de situatie van de voorbeeldzin nauwkeurig beschrijven, moeten we zeggen dat de bewijszin "Stel eerst $x > 0$ " bestaat uit een combinatie van het signaal "eerst" en de bewijszin "Stel $x > 0$ ", terwijl de laatste zin op zijn beurt een combinatie is van het signaal "stel" en de bewijszin " $x > 0$ ".

In gecompliceerde gevallen is de hiërarchie tussen bewijssignalen een lastig probleem. Voor de bewijszin: "Anderzijds volgt hieruit dus blijkbaar dat $\log x > 3$ " zou een hiërarchie kunnen zijn: 1. anderzijds, 2. blijkbaar, 3. dus, 4. hieruit volgt, maar de schrijver van dit stuk geeft deze mening graag voor een andere.

Soms komen twee bewijssignalen alleen schijnbaar in één bewijszin voor. Voorbeeld: "Want omdat X , is Y ". Hier hoort "omdat" in de zin "omdat X " thuis, maar "want" heeft betrekking op de zinscombinatie. Deze situatie kan als volgt worden weergegeven: "Want (omdat X , is Y)". Zie ook paragraaf 7.

Tenslotte merken we op dat "dus" vaak eerste prioriteit heeft als het samen met een ander signaal in een zin voorkomt. "Dus" kan wijzen op een directe koppeling, maar ook op een gevolgtrekkend verband over grotere afstand. Soms bestaat dit verband niet tussen twee enkelvoudige bewijszinnen, maar tussen groepen van bewijszinnen. "Dus" opereert dan op meta-niveau, wat we prioriteit geven boven het lokale niveau.

6. De taalkundige benoeming van bewijssignalen

Een signaalwoord kan, taalkundig gesproken, een voegwoord, een voorzetsel, een bijwoord of een werkwoord zijn. Een voegwoord ("en", "want") verbindt twee zinnen met elkaar. Voorzetsels ("op", "volgens") vormen samen met (meestal) een zelfstandig naamwoord een woordgroep. Bijwoorden ("hier", "blijkbaar") staan in zekere zin los van de zin waarin ze zijn opgenomen; ze hebben geen verbindende functie.

Signaalwoordcombinaties zijn meestal te vervangen door één signaalwoord, dat weer tot een van de vier genoemde woordsoorten behoort. We zullen een lijst geven van de woordsoorten van bewijssignalen, waarbij we de indeling uit § 3 volgen; bij signaalwoordcombinaties noemen we de woordsoort van een vervangend signaalwoord. In de lijst nemen we voorbeelden op.

I. Onderstellingsignalen

Werkwoorden (onderstel) of onderschikkende *voegwoorden* (als).

IIa. Redengevende koppelsignalen

Meestal *voegwoorden*, nevenschikkend (want) of onderschikkend (omdat), of *voorzetsels* (wegens); zelden een *bijwoord* (namelijk).

Opmerking: De *voegwoorden* en *voorzetsels* in deze klasse hebben een vergelijkbare functie in de bewijszin, zoals we al opmerkten in § 3, II. Dit blijkt bijvoorbeeld uit de verwisselbaarheid van de zinnen "Omdat f continu is" en "Wegens de continuïteit van f". (In de transformationeel-generatieve grammatica wordt aan deze zinnen eenzelfde structuur toegekend.)

IIb. Gevolgtrekkende koppelsignalen

Meestal *voegwoorden*, nevenschikkend (dus) of onderschikkend (zodat), of *bijwoorden* (bijgevolg, dus).

III. Definitiesignalen

Meestal *werkwoorden* (heet), zelden een onderschikkend *voegwoord* (als).

IV. Onderbreeksignalen

Bijwoorden (bovendien), soms *voegwoorden*, nevenschikkend (maar) of onderschikkend (hoewel).

V. Groepeersignalen

Bijwoorden (voorts).

VI. Commentaarsignalen

Combinaties met een *werkwoord* (we bewijzen dat), soms *bijwoorden* (evenzo).

VII. Modale signalen

Bijwoorden (blijkbaar).

Wat de *modus* van de *werkwoorden* betreft valt op, dat de gebiedende wijs bij de onderstellingsignalen overvloedig wordt toegepast. Ook een definitie-signaal wordt nog wel eens door een *werkwoord* in gebiedende wijs weergegeven.

De aanvoegende wijs komt voor bij onderstellingsignalen en soms bij definitiesignalen. We wijzen hierbij op het typische wiskundige gebruik van "zij" in een onderstelling of definitie. De woordvolgorde verdient hier aandacht: men schrijft menigmaal: "Zij x groter dan 0" wanneer bedoeld wordt: " x zij groter dan 0". Dit ongewone gebruik van inversie kan drie oorzaken hebben: 1. het voorkomt dat de zin met de naam van een variabele (x) wordt geopend, 2. de afwijkende constructie is ook toepasbaar bij half-formulaire bewijszinnen ("Zij $x > 0$ "), 3. het woord "zij" wordt niet meer gevoeld als aanvoegende wijs, maar als gebiedende wijs en daarom analoog behandeld (vgl.: "Neem x groter dan 0"), 4. de invloed van andere talen (m.n. Duits).

Het gebruik van de aantonnende en de onbepaalde wijs is niet verschillend van dat in niet-wiskundige teksten.

In bewijszinnen is het *tempus* meestal de tegenwoordige tijd. Het gebruik van de verleden tijd met de functie van irrealis, kwam in § 3, opmerking, al uitvoerig aan de orde. De toekomstige tijd wordt nog wel eens gebruikt bij definities: "We zullen ... noemen".

Omdat een bewijs vaak als een betoog wordt gezien, een persoonlijke vorm van redeneren, komt het *persoonlijk voornaamwoord* "we" veel in bewijs-teksten voor.

7. Samentrekking van bewijssignalen; samengestelde bewijszinnen

We spreken van een *samengetrokken* signaal, als twee of meer bewijszinnen een gemeenschappelijk bewijssignaal hebben, terwijl het slechts in één bewijszin (volledig) zichtbaar is. Voorbeeld: de bewijszinscombinatie "Definieer a als 5 en b als 7" kan men opvatten als samentrekking van "Definieer a als 5 en definieer b als 7". In de bewijszin: "en b als 7" was het bewijssignaaldeel "definieer" samengetrokken. Toch mogen we aannemen dat het er impliciet in aanwezig is. Uit dit voorbeeld blijkt dat de samentrekking "opgelost" kan worden. Maar in veel andere gevallen strekt de werking van één bewijssignaal zich uit over verschillende nevensgeschikte bewijszinnen zonder dat we het signaal in elk van die zinnen zichtbaar kunnen maken. Voorbeeld: de zinscombinatie: "... , want x is priem en groter dan 5" valt niet te herschrijven als bijvoorbeeld: "... , want x is priem en want x is groter dan 5". Toch heeft "want" op beide zinnen betrekking, zoals we in § 5

al zagen; de constructie is immers van de gedaante "want ((x is priem), ($x > 5$))". We kunnen zeggen dat "want" hier een gemeenschappelijk bewijs-sig-naal is van beide zinnen.

Een andere manier om deze situatie te benaderen is de volgende. We kunnen ons op het standpunt stellen dat er naast de bewijszinnen zoals we ze tot nu toe hebben bekeken (die we *enkelvoudig* zullen noemen), ook *samengestelde* bewijszinnen bestaan. Een samengestelde bewijszin kunnen we definiëren als een bewijszin die opgebouwd is uit een aantal kleinere bewijszinnen. De zin " x is priem en $x > 5$ " is dan zo een samengestelde bewijszin. Op deze manier ontstaat een geneste hiërarchie van bewijszinnen. Voor deze benadering valt veel te zeggen. (Ook in de taalkunde maakt men onderscheid tussen enkelvoudige en samengestelde zinnen.)

Sommige bewijszinscombinaties kan men op twee manieren analyseren: hetzij als samentrekking, hetzij als samengestelde bewijszin met een gemeenschappelijk signaal. Voorbeeld: de zin "Stel x priem en groter dan 5" kan men opvatten als "Stel x priem en stel x groter dan 5" (samentrekking van "stel x "), of als "Stel (x is priem en x is groter dan 5)" (samengestelde zin).

Samengetrokken en samengestelde bewijszinnen komen meestal in nevenschikkend verband voor. We merken op dat de woordvolgorde in deze gevallen niet altijd "logisch" hoeft te zijn. Voorbeeld: de zinscombinatie: "Als x een getal is groter dan 5 en y is negatief, ..." is in het Nederlands aanvaardbaar, hoewel "als" in het tweede deel geen inversie heeft veroorzaakt.

Eindhoven,
september 1980.

Met dank aan L.S. van Benthem Jutting, N.G. de Bruijn, D.T. van Daalen, J.W. Nienhuys, P. van der Steen en P.C. Uit den Bogaart.

Recapitulatie met karakteristieke voorbeelden

Indeling van bewijssignalen:

- I. onderstellingsignalen: - eerste soort: onderstel
 - tweede soort: laat ... zijn^{*)}
- II. koppelsignalen: - redengevend: want, omdat, wegens
 - gevolgtrekkend: dus, zodat
- III. definitiesignalen: definieer ... als
- IV. onderbreeksignalen: bovendien
- V. groepeersignalen: eerst, anderzijds
- VI. commentaarsignalen: we zullen laten zien dat, evenzo
- VII. modale signalen: blijkbaar

^{*)} In deze deelklasse bestaat geen karakteristiek signaal; ook "laat ... zijn" is niet steeds onderstellings signaal.

Literatuurverwijzingen

- [1] J.M. Anderson en H.W. Johnstone, jr.: *Natural Deduction*.
Belmont, 1963, 2e druk.
- [2] N.G. de Bruijn: *Taal en structuur van de Wiskunde*.
Bijlage bij het college aan de Technische Hogeschool, Onderafdeling der
Wiskunde.
Eindhoven, voorjaar 1978.
- [3] N.G. de Bruijn: *Grammatica van WOT*.
Euclides, 55e jaargang no. 2, oktober 1979.
- [4] D. Kalish en R. Montague: *Logic, Techniques of Formal Reasoning*.
New York, 1964.
- [5] R.P. Nederpelt: *Bewijsmethoden*.
Aanvullende syllabus bij het college Algebra en Analyse aan de
Technische Hogeschool, Onderafdeling der Wiskunde.
Eindhoven, 1976.
- [6] R.P. Nederpelt: *Bewijszinnen*.
Memorandum 1978-10, Technische Hogeschool, Onderafdeling der Wiskunde.
Eindhoven, 1978.
- [7] M.C. van den Toorn: *Nederlandse Grammatica*.
Groningen, 1975, 3e druk.