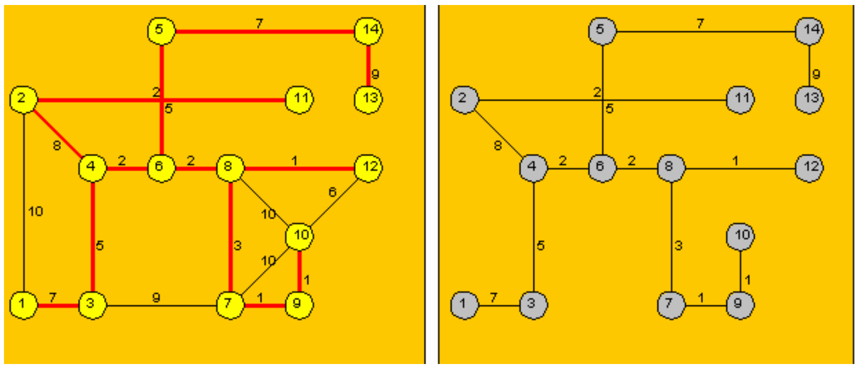


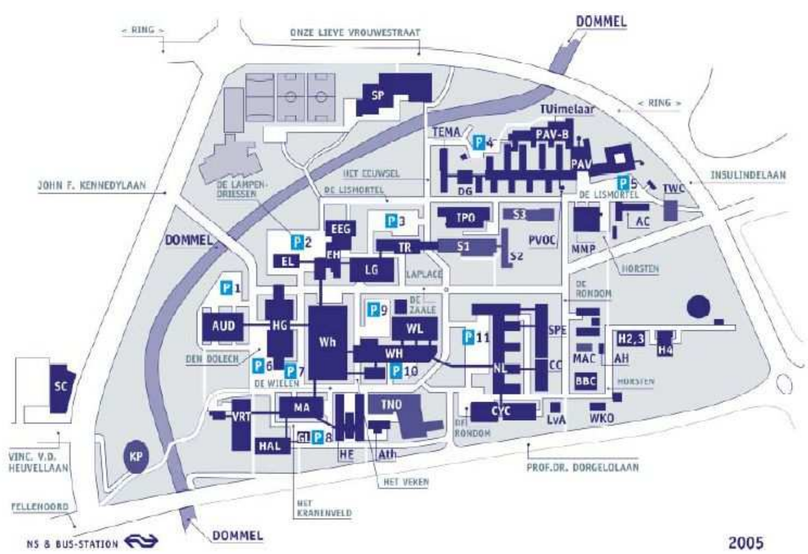
Wiskunde D

Keuzevak beslissen
onderdeel: beslissen in netwerken

versie 4 vrijdag 16 november 2007

Samenstelling
Jan Essers ism Kerngroep Wiskunde D Eindhoven

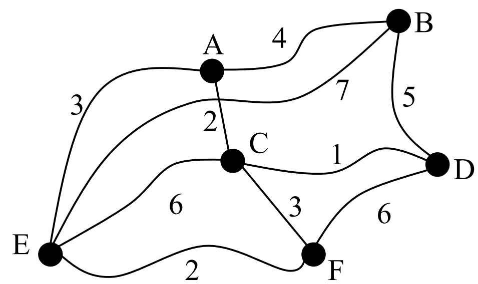
voorkennis: optimaliseren



Inhoud

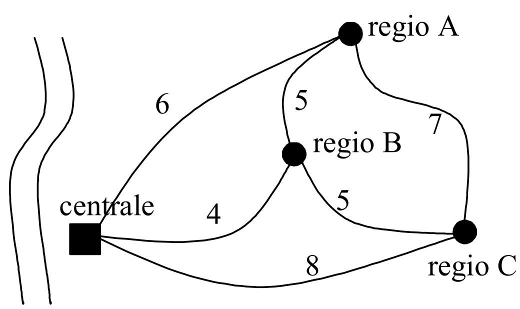
2.1 Basisproblemen

probleem 1
Op een fabrieksterrein wil men tussen zes depots een buizennetwerk aanleggen voor het transport van goederen. Hierbij moet elk van de zes depots bereikbaar zijn vanuit elk van de andere depots - eventueel via tussenliggende depots - en zijn omwegen niet erg omdat het vervoer door de buizen vrij snel gaat. De situatie zie je hieronder in een schema.



De depots zijn aangegeven door punten en de mogelijke verbindingen door lijnen. Niet elke verbinding is mogelijk vanwege tussenliggende gebouwen. Uiteraard wil men de kosten van het aan te leggen buizennetwerk zo laag mogelijk houden. In de tekening zijn de kosten van de mogelijke verbindingen weergegeven door getallen (in miljoenen euro's) langs de betreffende verbindingen.

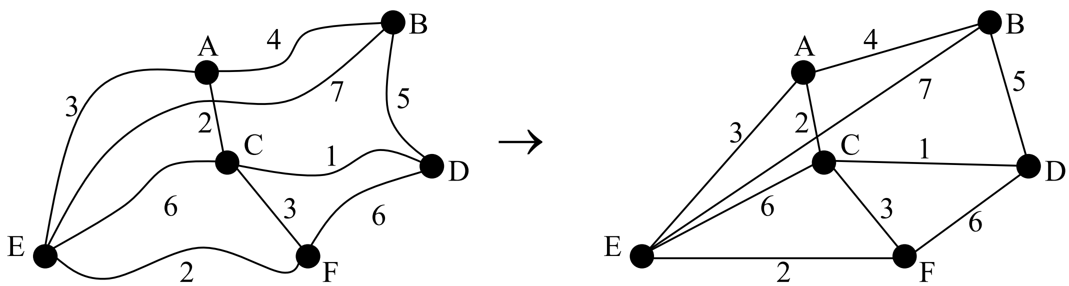
probleem 2
In de buurt van een rivier wordt een nieuwe gascentrale gebouwd die ook gas kan leveren aan drie verderop gelegen autonome regio's. Helaas zijn er nog geen leidingen naar de regio's. Die kunnen aangelegd worden maar daar hangt een behoorlijk prijskaartje aan: 600 miljoen Euro voor een gasleiding naar regio A, 400 miljoen naar B en 800 miljoen naar C. Het is ook mogelijk om van regio naar regio leidingen aan te leggen. De kosten daarvan (keer 100 miljoen) staan aangegeven in de onderstaande situatieschets. Die aanlegkosten moeten door de regio's worden opgebracht. Hoe *kunnen* de regio's samenwerken om kosten te besparen? En hoeveel zou een regio dan redelijkerwijs aan de kosten van een gezamenlijk netwerk moeten bijdragen?



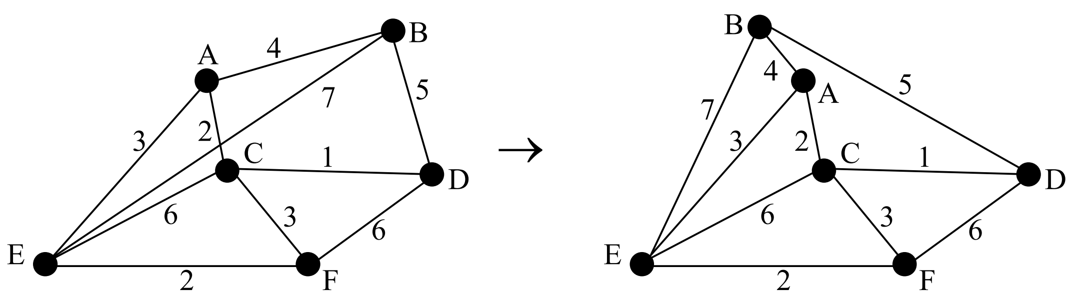
2.2 Basistheorie

Het figuur dat bij probleem 1 hoort noem je in de wiskunde een **graaf**. Het is een plaatje dat bestaat uit een verzameling punten die men ook wel **knopen** noemt (Engels: vertex) en verbindingen die men **kanten** of **lijnen** noemt (Engels: edges). De getallen die bij de verbindingen horen heten de **gewichten** van de lijnen. De tak van de wiskunde waarin grafen worden bestudeerd heet **grafentheorie** (Engels: graphtheory).

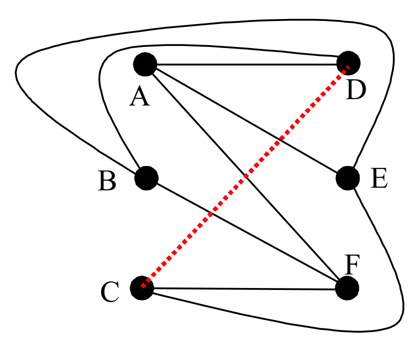
Bij de meeste problemen is de vorm van de verbinding niet van belang en in de grafentheorie tekent men daarom verbindingen tussen knopen meestal als rechte lijnstukken. De graaf bij probleem 1 kun je dus ook zo tekenen.



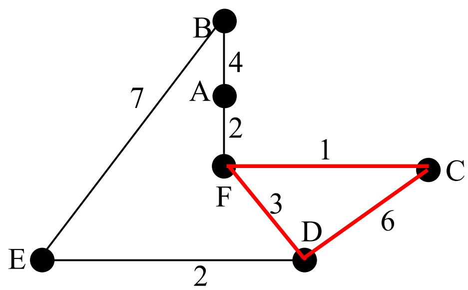
Het snijpunt van de lijnen BE en AC heeft in deze graaf geen betekenis. Dat snijpunt is dus geen punt van de graaf. Omdat dat snijpunt verwarrend kan werken kun je de lijn BE beter verplaatsen. In het volgende figuur zie je een derde weergave van het buizennetwerk. De knopen A en B zijn daarin ook wat verplaatst om alle lijnen als rechte lijnstukken te tekenen.

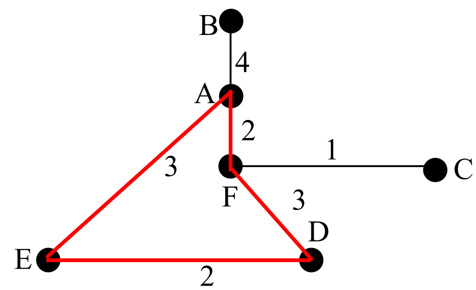


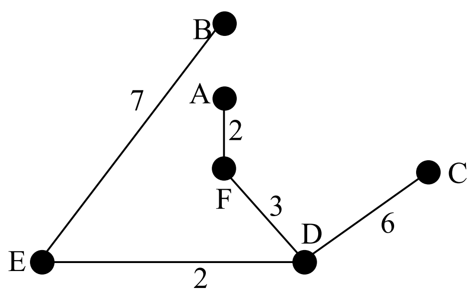
De grafen in de bovenstaande figuren kun je door het verplaatsen van knopen en vervormen van lijnen in elkaar over laten gaan. In de grafentheorie noemt men die grafen **isomorf**. Overigens is het niet altijd mogelijk om een graaf in het platte vlak te tekenen zonder snijpunten. Als er teveel lijnen zijn dan gaat dat niet meer lukken, ook al gebruik je “gebogen” verbindingen. Een graaf die je kunt tekenen zonder snijpunten tussen de lijnen heet een **vlakke graaf.** Hiernaast zie je een voorbeeld van een niet-vlakke graaf. De graaf bestaat uit 6 knopen en 9 lijnen. Zonder lijn CD is de graaf vlak maar met die verbinding erbij niet, ook niet door het verleggen van lijnen of het verplaatsen van knopen.

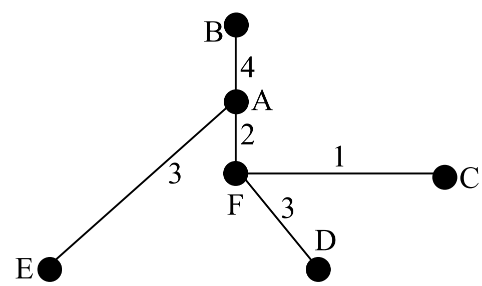


Terug naar het basisprobleem. In dat probleem moet elk depot aangesloten worden op een netwerk. Omdat er zes knopen zijn, zul je minstens vijf lijnen moeten gebruiken voor het netwerk, elke knoop moet immers in het netwerk worden opgenomen. In de onderstaande figuren zie je vier mogelijke netwerken die voldoen aan die eis. In de bovenste twee grafen zijn meer dan vijf lijnen gebruikt. In die grafen is daarom een rondwandeling mogelijk. Een rondwandeling is een **pad** (of weg) over verschillende lijnen van knoop naar knoop waarbij je terugkomt in de beginknoop (in de getekende rechtergraaf is dat AEDFA). Een gesloten pad heet officieel een **circuit** of een **cykel** (Engels: circuit of cykel).









Als je precies een lijn uit een circuit weghaalt dan blijven de knopen met elkaar verbonden en de totale lengte van het netwerk wordt dan kleiner. Daarom kunnen de grafen uit die twee bovenste tekeningen niet de oplossing van het netwerkprobleem zijn. Daarin zoek je namelijk het korste netwerk. In de onderste twee grafen zijn precies vijf lijnen getekend en is geen rondwandeling mogelijk. Een graaf waarin alle knopen met elkaar verbonden zijn die geen circuit bezit noemt men een **boom** (Engels: tree). Die grafen zijn dus bomen.

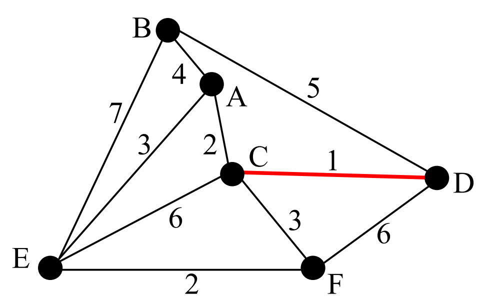
Het buizenprobleem komt er dus op neer dat je een boom zoekt waarvan de som van de gewichten van de lijnen minimaal is. Zo'n boom heet een **minimaal opspannende boom** (Engels: minimum spanning tree). De som van de gewichten in de linkerboom is 7 + 2 + 6 + 3 + 2 = 20 miljoen Euro. De som van de wichten van de rechterboom is 4 + 3 + 2 + 1 + 3 = 13 miljoen Euro. De linkerboom is dus zeker niet de minimaal opspannende boom. De rechterboom zou het kunnen zijn maar dat is niet zeker.

Een manier om de minimale opspannende boom te bepalen is het bepalen van alle bomen en dan steeds de som van de gewichten te bepalen. Dat is in deze situatie best nog mogelijk maar bij meer lijnen en knopen al snel een tijdsintensieve en vrij onmogelijke . klus. Zelfs de relatief kleine graaf die bestaat uit 6 knopen en 15 lijnen bezit ongeveer 1300 opspannende bomen.

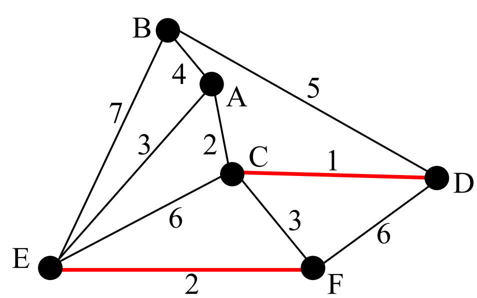
Er bestaat gelukkig slimmere strategieën. Een algoritme dat een minimale opspannende boom maakt is de volgende. Stel dat er n knopen zijn (en dus moet de boom $n-1$ lijnen krijgen)

- Kies een van de lijnen met het kleinste gewicht;
- Kies van de overgebleven lijnen de lijn met het kleinste gewicht en zorg daarbij dat die lijn samen met de eerder gekozen lijnen geen circuit vormt. Herhaal deze stap totdat je n knopen hebt.

Dit algoritme heet het **algoritme van Kruskal** en staat ook bekend als het zuinigheidsalgoritme. In de volgende serie plaatjes zie je hoe je dit algoritme op het buizenprobleem toepast

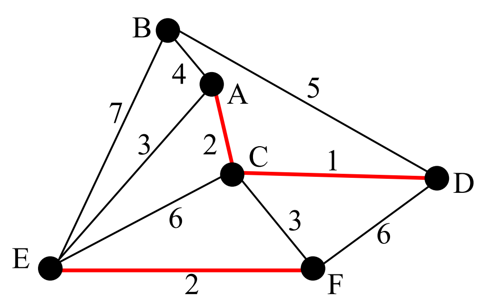


Kies lijn **CD**, deze heeft het kleinste gewicht, namelijk 1



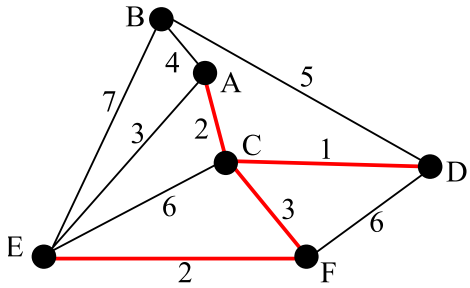
Kies lijn AC of EF, deze hebben beide gewicht 2. Keuze voor **EF**.

Som gewichten:
1 + 2 = 3.



Dit keer is lijn **AC** de lijn met het kleinste gewicht en moet dus gekozen worden.

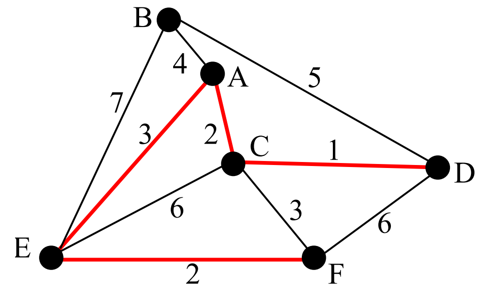
Som gewichten:
1 + 2 + 2 = 5.

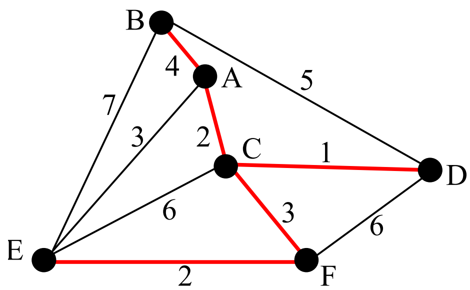


Gewicht 3 komt twee keer voor. Bij beide keuzes ontstaat geen circuit.

Links keuze **CF**
Rechts keuze **AE**

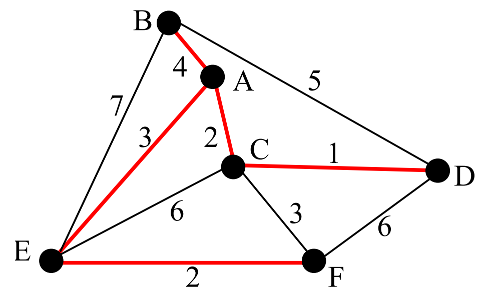
Som gewichten:
1 + 2 + 2 + 3 = 8.





In beide situaties moet **BA** gekozen worden (bij keuze gewicht 3 ontstaat circuit).

Som gewichten:
1 + 2 + 2 + 3 + 4 = 12.

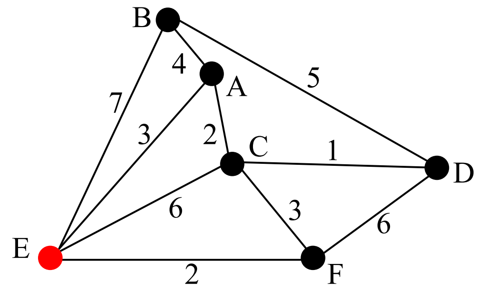


Het probleem is nu opgelost. Er zijn twee minimale opspannende bomen en de som van de gewichten is 12. Voor het buizenprobleem betekent dat dat de minimale kosten 12 miljoen Euro bedraagt. De bedrijfsleiding kan kiezen uit twee netwerken.

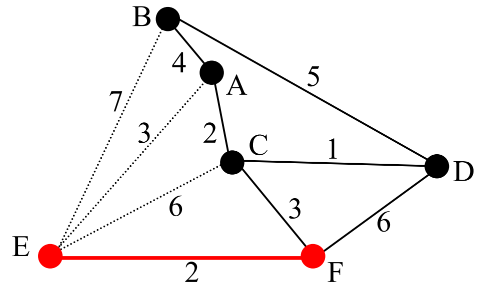
Het algoritme van Kruskal beperkt het zoek- en rekenwerk aanzienlijk. De stap die in grote netwerken het meeste tijd kost is het controleren of er geen circuit ontstaat. Een methode waarbij die controle niet hoeft plaats te vinden is het **algoritme van Prim**. In dat algoritme voeg je geen lijnen toe maar knopen:

- Kies een willekeurige knoop;
- Kies uit alle lijnen van die knoop een lijn met minimaal gewicht;
- Kies van alle lijnen die bij de eerder gekozen knopen horen, steeds de lijn met het kleinste gewicht en voeg de bijbehorende nieuwe knoop toe. Herhaal deze stap totdat je *n* knopen hebt.

Ook dit algoritme gaan we stapsgewijs volgen bij het buizenprobleem.

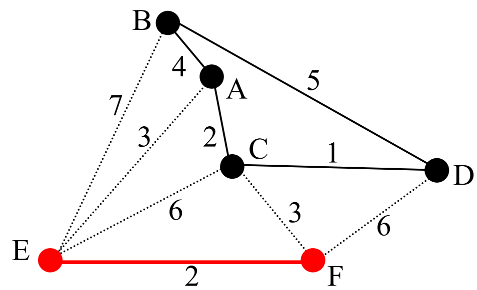


Kies (vrij willekeurig) knoop **E**.

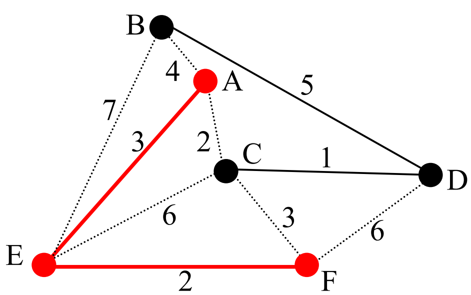


In knoop E komen vier lijnen samen. Kies de lijn met het kleinste gewicht: EF.
Knoop **F** wordt toegevoegd.

Som gewichten: 2 .



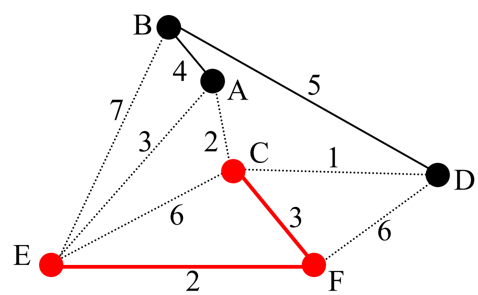
Bij de knopen E en F komen samen 5 lijnen aan. De lijnen met minimaal gewicht zijn AE en CF. Beide kunnen gekozen worden.

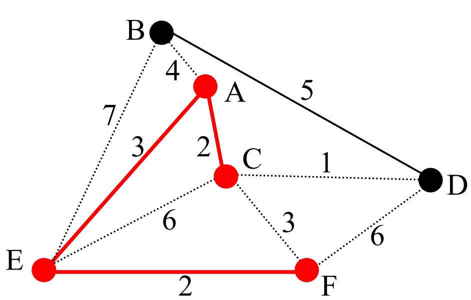


Links:
Voeg AE toe
met gewicht 3

Rechts:
Voeg CF toe
met gewicht 3

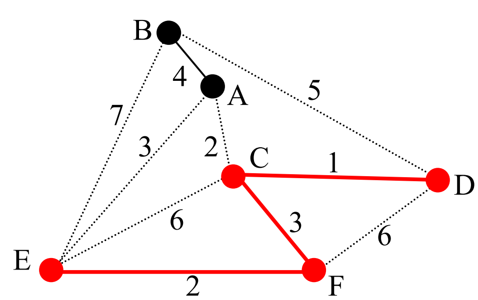
Som gewichten:
2 + 3 = 5.

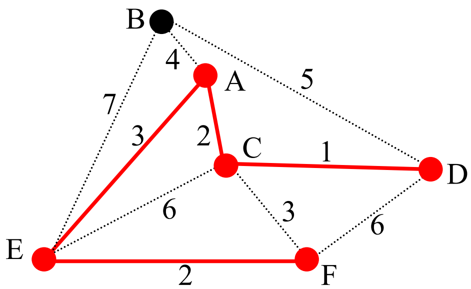




Links:
Voeg AC toe
met gewicht 2

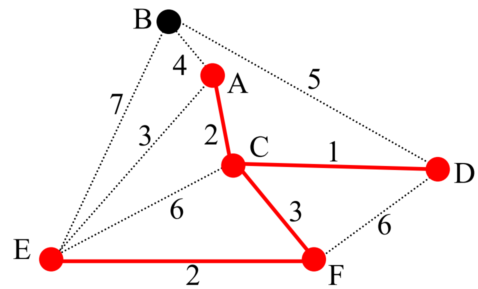
Rechts:
Voeg CD toe
met gewicht 1

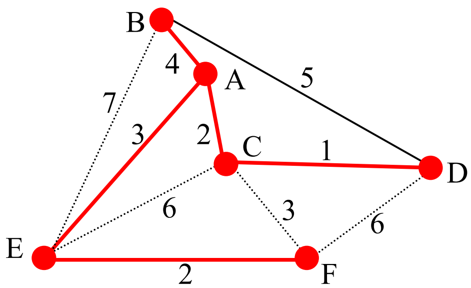




Links:
Voeg CD toe
met gewicht 1

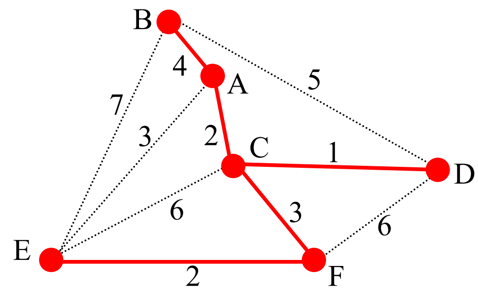
Rechts:
Voeg AC toe
met gewicht 2





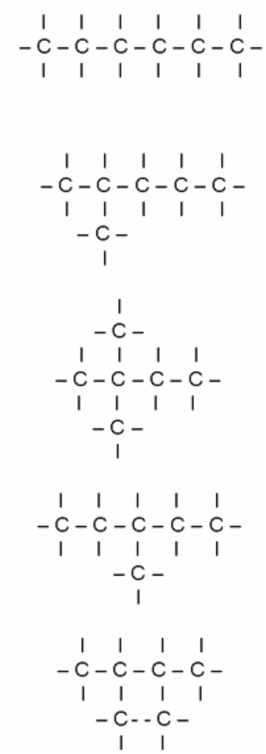
Links:
Voeg AB toe
met gewicht 4

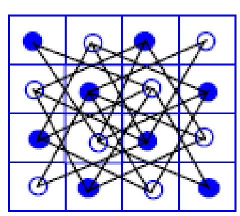
Rechts:
Voeg AB toe
met gewicht 4



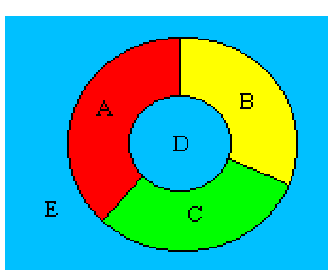
Uiteraard levert het algoritme van Prim dezelfde oplossingen (anders zou het geen correct algoritme zijn) als het algoritme van Kruskal. Het bewijs dat de beide algoritmes altijd de minimale opspannende boom leveren is niet heel eenvoudig en laten we hier achterwege.

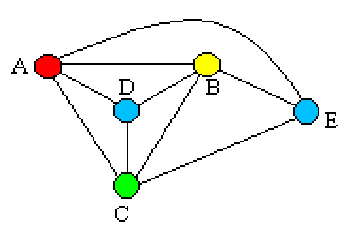
Probleem 1 is een typisch voorbeeld uit de grafentheorie. In dat omvangrijke gebied van de wiskunde houdt men zich bezig met allerlei netwerkproblemen. Je moet daarbij denken aan het bepalen van korste paden tussen knopen of aan rondwandelingen langs alle knopen of aan het kleuren van landkaarten.





rondwandeling paard langs alle velden (knopen)



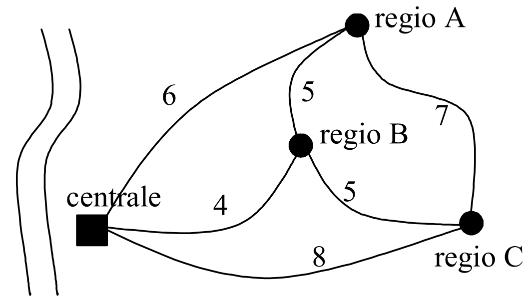


kleuren van landkaarten

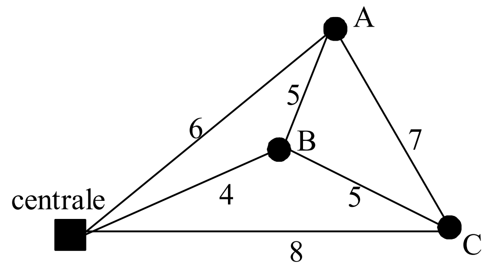
Ook in andere wetenschappen worden grafen gebruikt. Hierboven rechts zie je hoe grafen in de scheikunde gebruikt worden om organische stoffen weer te geven.

Ook in basisprobleem 2 speelt grafentheorie een rol. Maar er zal blijken dat daar ook nog andere aspecten een rol spelen. Dat probleem luidde als volgt:

probleem 2
In de buurt van een rivier wordt een nieuwe gascentrale gebouwd die ook gas kan leveren aan drie verderop gelegen autonome regio's. Helaas zijn er nog geen leidingen naar de regio's. Die kunnen aangelegd worden maar daar hangt een behoorlijk prijskaartje aan: 600 miljoen Euro voor een gasleiding naar regio A, 400 miljoen naar B en 800 miljoen naar C. Het is ook mogelijk om van regio naar regio leidingen aan te leggen. De kosten daarvan (keer 100 miljoen) staan aangegeven in de onderstaande situatieschets. Die aanlegkosten moeten door de regio's worden opgebracht. Hoe *kunnen* de regio's samenwerken om kosten te besparen? En hoeveel zou een regio dan redelijkerwijs aan de kosten van een gezamenlijk netwerk moeten bijdragen?

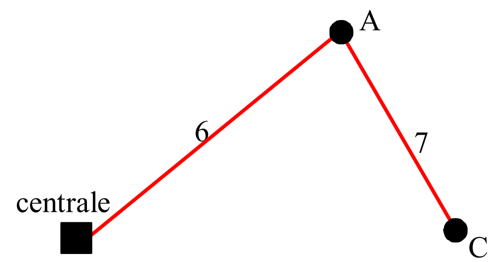


Ook bij probleem 2 speelt een graaf een rol. Zonder rivier en met rechte lijnen ziet de graaf er zo uit.



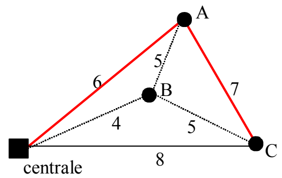
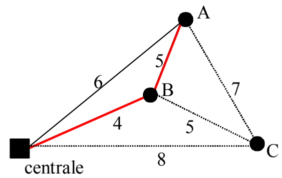
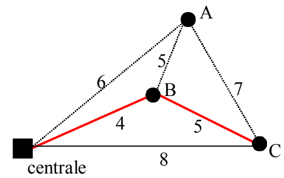
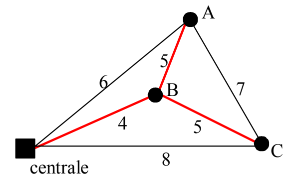
Elke regio kan direct op de centrale worden aangesloten. Regio B betaalt dan het minst en regio C het meest. Als de regio's slim zijn dan zullen ze inzien dat het verstandig is om samen te werken. Regio's die samenwerken noem je een **coalitie**. Een term die stamt uit het wiskundegebied **speltheorie**. De regio's noem je in dat vakgebied meestal **spelers**. In de speltheorie wordt onder andere nagegaan hoe spelers kunnen **coöpereren**, een ander woord voor samenwerken.

De twee regio's A en C kunnen bijvoorbeeld voor 6 + 7 = 13 eenheden (= 1300 miljoen Euro) worden aangesloten. Die twee gewichten horen bij de minimale opspannende boom waarbij knoop B en alle kanten naar B worden weggelaten.



De twee regio's vormen op die manier samen een coalitie. Als A dan bijvoorbeeld 5,5 eenheden bijdraagt en C dus 13 – 5,5 = 7,5 eenheden dan hebben beide regio's een voordeel van 0,5 eenheid en dat is 50 miljoen Euro. Niet mis!

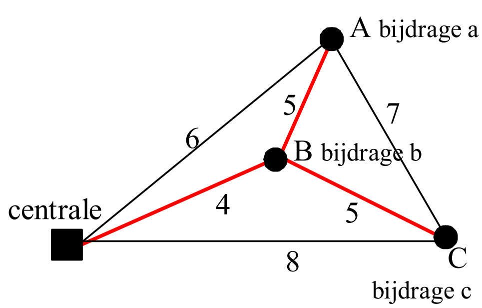
Op dezelfde manier kun je ook andere samenwerkingsverbanden bekijken. In de onderstaande plaatjes zie je de minimale bomen bij alle mogelijke coalities. Onder de graaf staan de kosten voor de coalitie en voor de regio die niet in de coalitie zit.

Coalitie A en C	Coalitie A en B	Coalitie B en C	Coalitie A, B en C
			
kosten coalitie: 13 kosten B: 4	kosten coalitie: 9 kosten C: 8	kosten coalitie: 9 kosten A: 6	kosten coalitie: 14

De totale kosten zijn minimaal 14 als alle drie de regio's een coalitie vormen. Het netwerk is dan de minimaal opspannende boom van de gehele graaf. Vrij logisch want die boom is niet voor niks de minimaal opspannende boom. Als onafhankelijk adviseur zou je adviseren dat iedereen moet samenwerken en dat de leidingen van de centrale naar B en van daaruit naar A en C moeten worden aangelegd.

Maar daarmee is het probleem nog niet opgelost. Hoe ga je de kosten in rekening brengen? Samenwerken betekent niet zonder meer dat iedereen evenveel moet bijdragen. Dat zou in dit voorbeeld betekenen dat elke regio $14/3 \approx 4,67$ eenheden moet bijdragen. Een bedrag dat regio B niet goed aan haar burgers kan verkopen want niet samenwerken en dus direct aansluiten kost slechts 4 eenheden. Regio B zal dus minder dan 4 eenheden willen bijdragen. In het meest extreme geval zou B kunnen voorstellen om niks bij te dragen. Via B krijgen de andere immers hun gas. Regio A en C moeten dan samen 14 eenheden bijdragen. Maar dat zullen ze zeker niet doen want als ze zonder B samenwerken dan betalen ze slechts 13 eenheden.

Je kunt je nu afvragen of er wel een "goede verdeling" bestaat. Als dat zo is dan zal de bijdrage van B tussen de 0 en de 4 moeten liggen. Om dit probleem verder te analyseren voeren we drie variabelen in.



a is het aantal eenheden dat regio A bijdraagt aan de totale kosten van de coalitie ABC
b is het aantal eenheden dat regio B bijdraagt aan de totale kosten van de coalitie ABC
c is het aantal eenheden dat regio C bijdraagt aan de totale kosten van de coalitie ABC

Er geldt natuurlijk dat $a+b+c=14$ want de drie deelnemers in de coalitie moeten samen het netwerk bekostigen.

Verder zal geen enkele regio meer dan de directe aansluitkosten willen betalen. Dat levert de voorwaarden:

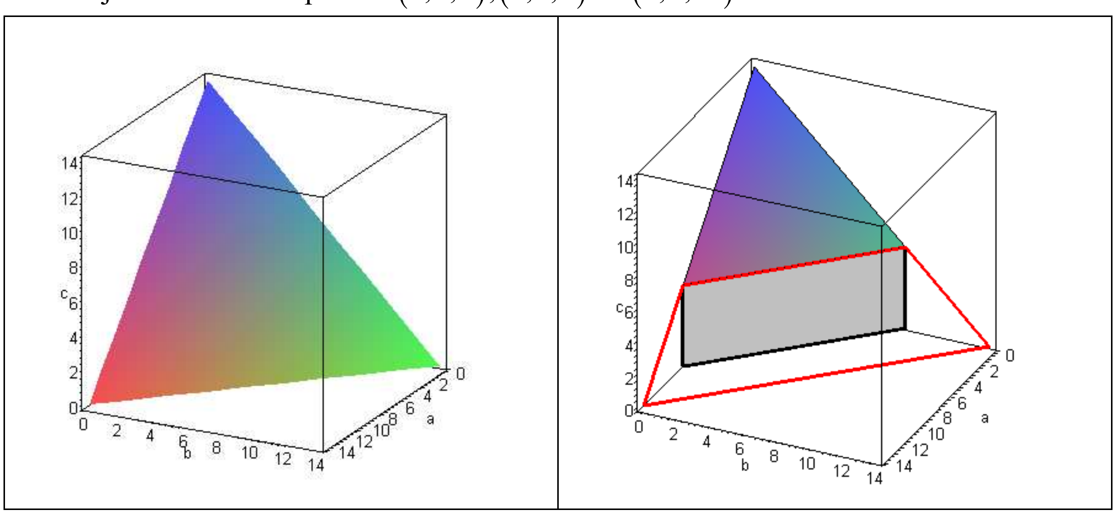
$$0 \le a \le 6 \quad , \quad 0 \le b \le 4 \quad , \quad 0 \le c \le 8$$

Ook zal elke regio in de coalitie van drie regio's niet meer willen bijdragen dan dat er in een coalitie van 2 partijen moet worden betaald. Voor de regio's A en C houdt dat - zoals eerder besproken - in dat $a+c \le 13$. Ook de regio's A en B zouden zonder C kunnen samenwerken en dat levert de voorwaarde: $a+b \le 9$. En voor B en C samen geldt : $b+c \le 9$.
Al met al geldt nu voor de drie bijdragen:

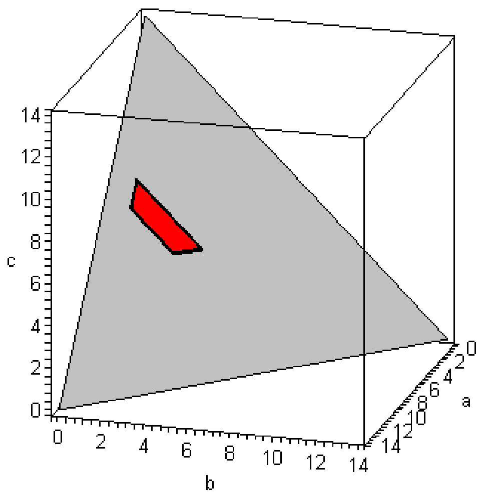
$$\boxed{\begin{array}{l} a+b+c=14 \\ a+b \le 9 \quad , \quad a+c \le 13 \quad , \quad b+c \le 9 \\ 0 \le a \le 6 \quad , \quad 0 \le b \le 4 \quad , \quad 0 \le c \le 8 \end{array}}$$

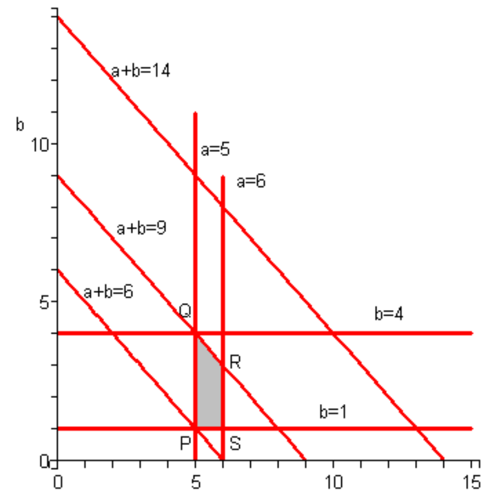
De voorwaarden zijn allemaal lineair: een lineaire gelijkheid en negen lineaire ongelijkheden. Daardoor lijkt dit probleem op de optimaliseringsproblemen uit hoofdstuk 1. Verschil is echter dat er nu geen doelfunctie is. Het minimaliseringsprobleem is al opgelost door het bepalen van de minimaal opspannende boom waaruit volgde dat $a+b+c=14$. Maar net zo goed als bij de optimaliseringsproblemen is er nu sprake van een beperkend gebied dat het aantal oplossingen beperkt.

Omdat er slechts 3 variabelen zijn kun je het gebied dat bij de voorwaarden hoort schetsen. Dat kan met 3d-plaatjes maar ook met 2d-plaatjes. In het onderstaande linkerplaatje zie je het vlak $a+b+c=14$ in het eerste octant (dus $a,b,c \ge 0$). De toegestane oplossingen liggen dus in een driehoek. De drie hoekpunten van die driehoek zijn $(14,0,0),(0,14,0)$ en $(0,0,14)$. In het rechterplaatje is de voorwaarde $a+b \le 9$ verwerkt . Het vlak $a+b=9$ is een verticaal vlak (snijdt grondvlak in lijn door$(9,0,0),(0,9,0)$) en dat vlak snijdt een gedeelte van de driehoek af. De driehoek die overblijft heeft als hoekpunten $(9,0,5),(0,9,5)$ en $(0,0,14)$.



Elke voorwaarde zorgt ervoor dat er een stuk van de driehoek wordt afgesneden. In het onderstaande linkerplaatje zie je het gebied dat overblijft na verwerking van alle voorwaarden. Het is een vierhoek op het vlak $a+b+c=14$.





Het gebied kun je ook tweedimensionaal in beeld brengen als je het projecteert op het grondvlak. Dat figuur is veel eenvoudiger te tekenen dan een 3d-plaatje. Bedenk daarbij dat steeds geldt $a+b+c=14$. De voorwaarden waarin een *c* staat moeten worden omgewerkt naar een voorwaarde zonder *c* die je dan kunt tekenen in het *ab*-vlak:.

voorwaarde	***c* elimineren met** $c=14-a-b$	**vereenvoudigen**
$b+c\le 9$	$14-a\le 9$	$a\ge 5$
$a+c\le 13$	$14-b\le 13$	$b\ge 1$
$0\le c\le 8$	$0\le 14-a-b\le 8$	$6\le a+b\le 14$

En uiteraard moeteen ook de voorwaarden $a+b\le 9$, $a\le 6$ en $b\le 4$ getekend worden.

In het rechterfiguur zie je alle lijnen die bij de ongelijkheden horen. Het grijze gebied, vierhoek PQRS, is het toegestane gebied.

Er is dus een hele verzameling van punten die aan alle voorwaarden voldoen. De vier hoekpunten van het gebied P, Q, R en S zijn interessante punten.

Hoekpunt P

$$\begin{cases} a=5 \\ b=1 \\ a+b+c=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=1 \\ c=8 \end{cases}$$

Hoekpunt Q

$$\begin{cases} a=5 \\ b=4 \\ a+b+c=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=4 \\ c=5 \end{cases}$$

elke regio betaalt zijn eigen verbinding in boom

Hoekpunt R

$$\begin{cases} a=6 \\ a+b=9 \\ a+b+c=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=3 \\ a+b+c=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=3 \\ c=5 \end{cases}$$

Hoekpunt S

$$\begin{cases} a=6 \\ b=1 \\ a+b+c=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=1 \\ c=7 \end{cases}$$

Regio A kan zal dus redelijkerwijs minimaal 5 en maximaal 6 eenheden moeten bijdragen, Regio B minimaal 1 en maximaal 4 en regio C minimaal 5 en maximaal 8.
In het volgende overzicht zie je bij die vier situaties de absolute en de relatieve winst (in hele %) ten opzichte van de aanleg zonder samenwerking.

	bijdragen regio's	**absoluut voordeel** (keer 100 miljoen)	**relatief voordeel**
Punt P	Regio A $a=5$	1	17 %
	Regio B $b=1$	3	75 %
	Regio C $c=8$	0	0 %
Punt Q	Regio A $a=5$	1	17 %
	Regio B $b=4$	0	0 %
	Regio C $c=5$	3	38 %
Punt R	Regio A $a=6$	0	0
	Regio B $b=3$	1	25 %
	Regio C $c=5$	3	38 %
Punt S	Regio A $a=6$	0	0
	Regio B $b=1$	3	75 %
	Regio C $c=7$	1	13 %

In die hoekpunten is er steeds een regio die geen voordeel uit de coalitie boekt. De regio in kwestie kan dus net zo goed niet meedoen. Als neutrale buitenstaander zou je nu allerlei voorstellen kunnen doen. Je zou bijvoorbeeld ongeveer het midden van de vierhoek kunnen kiezen. Dat levert het volgende voorstel.

Regio A $a=5,50$	1,50	25 %
Regio B $b=2,75$	1,25	31 %
Regio C $c=5,75$	2,25	28 %

Dat levert aanzienlijke besparingen voor elke regio op. Uiteraard kun je ook allerlei andere verdelingen bedenken binnen het gebied PQRS. De wiskunde heeft in ieder geval de redelijke grenzen voor elke regio vastgesteld en zijn taak volbracht.

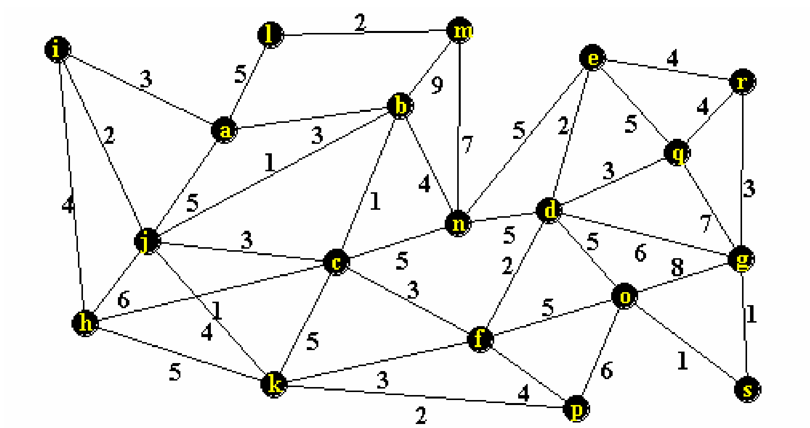
In dit voorbeeld heb je gezien hoe grafentheorie en onderdelen van optimaliseren bij elkaar komen. Bij meer dan drie spelers is het bepalen van minimale opspannende bomen nog altijd geen probleem. Met de algoritmes van Prim of Kruskal gaat dat snel. Het aantal voorwaarden stijgt echter behoorlijk omdat er steeds meer coalities mogelijk zijn. Bij vier spelers zijn er al 19 voorwaarden. Bovendien kun je dan je dan niet meer met een 2d-plaatje snel het toegelaten gebied in beeld brengen.

2.3 Verwerkingsopdrachten

Opdrachten over opspannende bomen.

1 Minimaal netwerk

Bepaal de minimale opspannende boom bij het onderstaande netwerk. Kies het algoritme dat je het handigst lijkt.



2 Eilanden

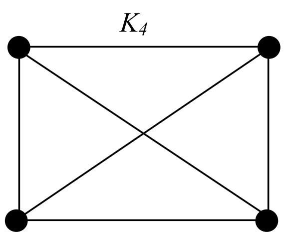
Er liggen acht kleine eilandjes in een meer, en de regering wil 7 bruggen bouwen om ze te verbinden, zodat ieder eiland bereikt kan worden vanuit ieder eiland via een of meer bruggen. De afstanden tussen ieder tweetal eilanden is gegeven in de tabel

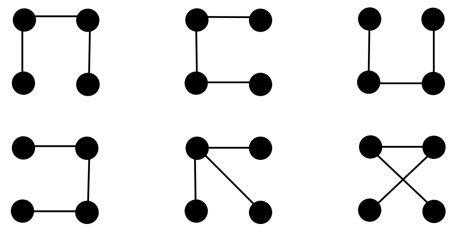
	1	2	3	4	5	6	7	8
1		24	21	34	28	20	35	12
2			27	18	22	18	19	16
3				26	12	35	44	20
4					16	33	30	23
5						36	40	17
6							18	21
7								31
8								

Welke bruggen moeten gebouwd worden om de kosten, die evenredig zijn met de totale lengte van de bruggen, te minimaliseren?

3 Aantal bomen?

Hieronder zie je een graaf die bestaat uit 4 knopen. Alle knopen zijn met elkaar verbonden en dus zijn er zes lijnen. Zo'n graaf heet een complete graaf en wordt aangegeven door K_n met n het aantal knopen





a) Teken K_5 en tel het aantal lijnen van K_5.

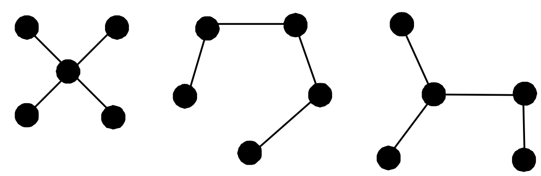
b) Hoeveel lijnen bezit K_n ?

c) De graaf K_4 bezit **meer dan** 10 opspannende bomen. Hierboven rechts zie je er zes getekend. Hoeveel opspannende bomen bezit K_4 exact?

d) Wat is fout in de volgende redenering:

Een opspannende boom van K_4 heeft 3 lijnen. Je kunt op $\binom{6}{3} = 20$ manieren 3 lijnen uit 6 lijnen kiezen dus K_4 heeft 20 opspannende bomen.

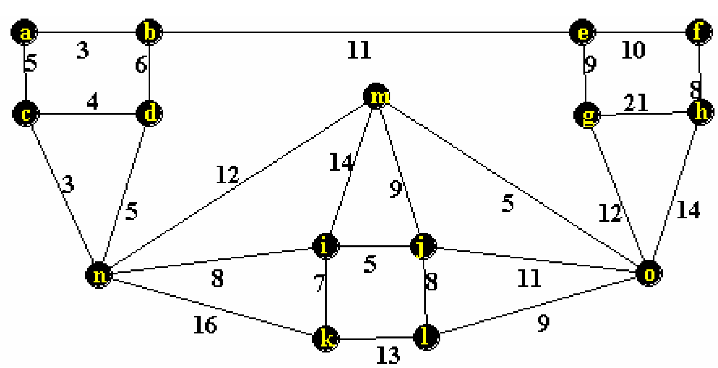
e) De opspannende bomen van K_5 zijn "niet" te tekenen. Teveel! Toch kun je ze tellen als je drie typen boom onderscheidt. Tel het aantal verschillende bomen van elk type en bepaal het totaal aantal opspannende bomen van K_5.



type 1 type 2 type 3

4 Maximaal netwerk

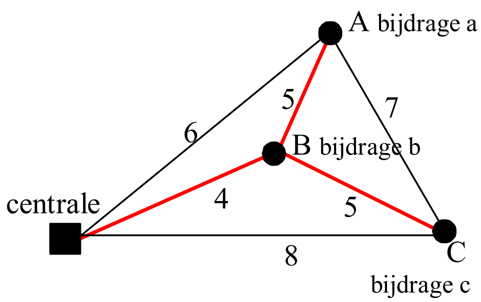
In de tekst is steeds sprake van een minimaal opspannende boom. Je kunt met kleine wijzigingen de algoritmes van Prim en Kruskal aanpassen zodat ze een **maximaal opspannende boom leveren**. Dat is een boom waarvan de som van de gewichten maximaal is. Bepaal met behulp van de gewijzigde algoritmes van Prim en Kruskal een maximaal opspannende boom voor de het onderstaande netwerk

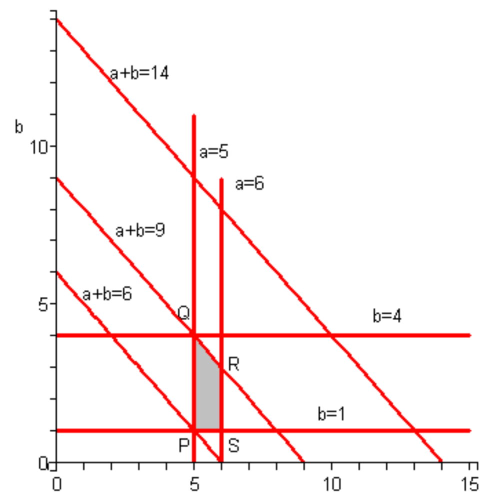


Opdrachten bij probleem 2

5 Invloed van een gewicht

In de onderstaande tekeningen zie je nogmaals de graaf bij probleem 2 en het gebied bij de beperkende voorwaarden





a) Bereken waarden van a, b en c zodanig dat elke regio hetzelfde absolute voordeel heeft? Is die oplossing mogelijk met andere woorden voldoet die oplossingen aan alle voorwaarden?

De aansluitkosten van A naar C bedragen 7 eenheden. Als de aansluitkosten voor de leiding van A naar C groter worden dan blijft de minimale opspannende boom gelijk. Het toegelaten gebied verandert echter.

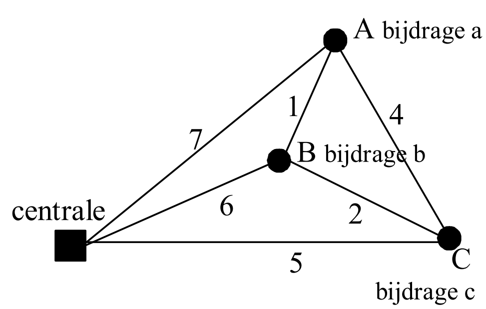
b) Teken het nieuwe toegelaten gebied als de kosten 7,5 zijn.
c) Hoe verandert het toegelaten gebied bij toenemende kosten.

Als de aansluitkosten van A naar C kleiner worden dan is het mogelijk dat een andere minimale opspannende boom voor de coalitie van drie regio's ontstaat. AC vervangt dan AB of BC in de boom.

d) Bij welke gewicht bij lijn AC ontstaat er een andere minimale opspannende boom?
e) Bepaal alle voorwaarden en teken het beperkende gebied als lijn AC gewicht 4 heeft.
f) Bereken de absolute en de relatieve winst in de hoekpunten van het nieuwe toegelaten gebied

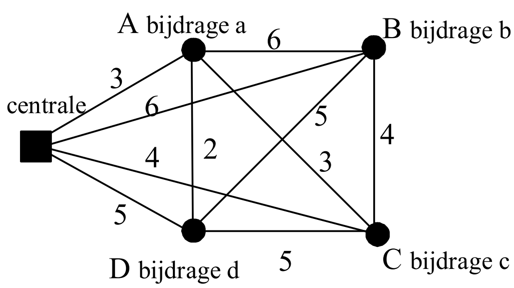
6 Een ander netwerk

Hieronder zie je net als bij probleem 2 een graaf met aanlegkosten van de leidingen. Stel bij deze graaf alle voorwaarden op, teken het toegelaten gebied en analyseer absolute en relatieve winst (tov directe kosten) in de hoekpunten van het toegelaten gebied.



7 Meer regio's

Als er meer regio's zijn dan neemt het aantal coalities en voorwaarden toe. Hieronder zie je een centrale met vier regio's die aangesloten willen worden. De gewichten van de lijnen zijn in miljoenen)

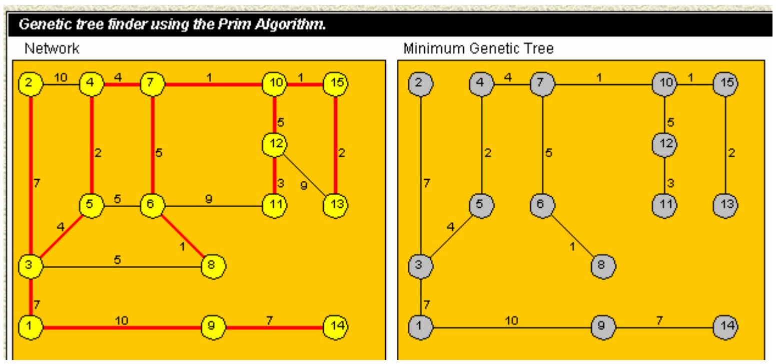


a) Beredeneer dat de coalitie bestaande uit de regio's A, B en C een netwerk kunnen laten aanleggen voor 10 miljoen
b) Hoeveel verschillende coalities zijn er die uit meer dan een regio bestaan?
c) Bepaal voor elke coalitie de minimale kosten van het netwerk dat ze gezamenlijk kunnen aanleggen?
d) Als alle regio's samenwerken zijn de aanlegkosten minimaal. Om welke kosten gaat het dan?
e) Er geldt : $0 \le a \le 3$, $0 \le b \le 6$, $0 \le c \le 4$, $0 \le d \le 5$
Stel alle andere voorwaarden op.
f) Geef een oplossing die aan alle voorwaarden voldoet en bereken de winst tov de directe aansluitkosten van elke deelnemer.
g) Kun je ook een oplossing vinden waarbij elke partij voordeel heeft?

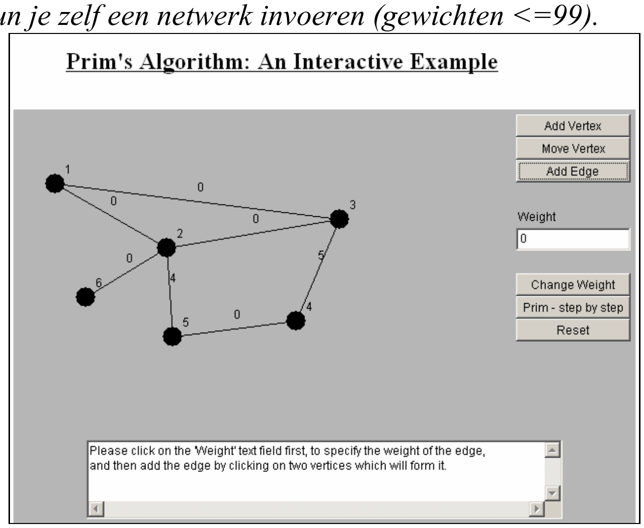
2.5 Literatuur en verwijzingen

Applets waarin de algoritmen van Kruskal en Prim stap voor stap getoond wordt

1)
http://www-b2.is.tokushima-u.ac.jp/~ikeda/suuri/main/index.shtml
Kies Prim en vervolgens demo 1 … demo 7
2)
http://students.ceid.upatras.gr/~papagel/project/prim.htm
Start met new problem en klik dan herhaald op Step Solve.

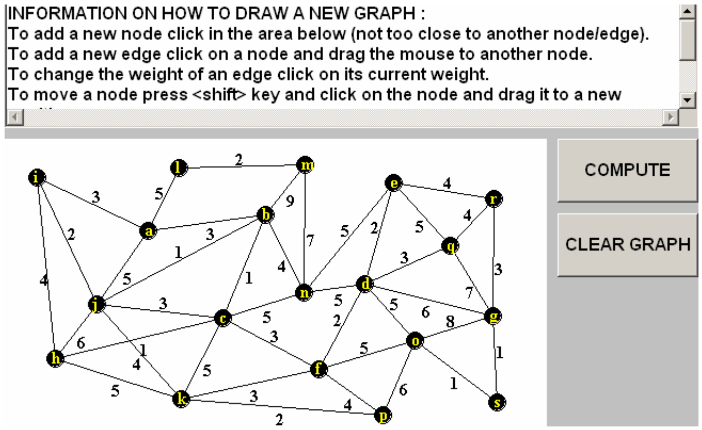


3)
http://www.cs.usask.ca/resources/tutorials/csconcepts/1999_8/tutorial/advanced/prim/prim_kruskal.html
Met deze applet kun je zelf een netwerk invoeren (gewichten <=99).



Start met add vertex en klik dan op gebied. Vervolgens punten toevoegen en gewichten invoeren.

4) http://www.cs.man.ac.uk/~graham/cs2022/greedy/
Ook op deze site kun je zelf knopen, lijnen en gewichten invoeren.



2.5 Overzicht begrippen