Uitwerkingen Tentamen Mathematische Statistiek (2S990) en Mathematische Statistiek 1 (2S210) op donderdag 29 november 2001, 9.00-12.00 uur.

---

1. (a)

$$\begin{aligned} f(x_1,\ldots,x_n \mid \mu) &= \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n}\ e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2} \\ &= \left(\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n}\ e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n x_i^2}\right)\ \left(e^{-\frac{1}{2}n\mu^2} e^{\mu\sum_{i=1}^n x_i}\right). \end{aligned}$$

De dichtheid kan dus geschreven worden als $h(x_1,\ldots,x_n)\,g(T,\mu)$. Uit de factorisatiestelling volgt nu dat T een voldoende steekproefgrootheid voor μ is.

(b)

$$E\,U = 0.P(U=0) + 1.P(U=1) = P(X_1 < c) = P(X_1-\mu < c-\mu) = \Phi(c-\mu),$$

waarbij Φ de cumulatieve verdelingsfunctie is van de standaardnormale verdeling.

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}\,U &= E\,U^2 - (E\,U)^2 \\ &= E\,U - (E\,U)^2 \ \text{ want } U \text{neemt alleen de waarden 0 en 1 aan} \\ &= E\,U(1-E\,U) = \Phi(c-\mu)\,(1-\Phi(c-\mu))\,. \end{aligned}$$

(c) De ondergrens van Cramér-Rao voor μ is gelijk aan

$$\begin{aligned} 1/\left(nE\left(\frac{\partial}{\partial\mu}\ln f(X\mid\mu)\right)^2\right) &= 1/\left(nE\left(\frac{\partial}{\partial\mu}\ln\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{1}{2}(X-\mu)^2}\right)^2\right) \\ &= 1/\left(nE\left(\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\ln\sqrt{2\pi}-\frac{1}{2}\,(X-\mu)^2\right)\right)^2\right) \\ &= 1/\left(nE\,(X-\mu)^2\right) = 1/\,(n\mathrm{Var}\ X) = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Aangezien $P(X<c)=\Phi(c-\mu)$, is hier $g(\mu)=\Phi(c-\mu)$ en $g'(\mu)=\phi(c-\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(c-\mu)^2}{2}}$. Dus de Cramér-Rao ondergrens voor de variantie van een zuivere schatter van $P(X<c)$ is gelijk is aan $\dfrac{1}{2\pi\,n}\,e^{-(c-\mu)^2}$.

(d) Aangezien $P(X<c)=\Phi(c-\mu)$ en $\overline{X}$ de ML-schatter is voor μ, volgt uit het invariantie-principe (stelling van Zehna) dat $\Phi(c-\overline{X})$ de ML-schatter is voor $P(X<c)$.

2. (a) We toetsen $H_0:\mu_1=\mu_2$ tegen $H_1:\mu_1\neq\mu_2$. Er geldt $\overline{X_1}=3,8$, $\overline{X_2}=3,7$ en $S_p^2=\frac{0{,}115+0{,}0085}{2}=0,1$ (dus $S_p=0,319$). Toetsingsgrootheid is $T=\frac{\overline{X_1}-\overline{X_2}}{S_p\sqrt{1/5+1/5}}=0,5$. Aangezien het kritieke gebied gelijk is aan $|T|>t_{8;0{,}025}=2,306$, wordt H_0 niet verworpen.

(b) Het betrouwbaarheidsinterval is gelijk

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} f_{4;4;0,975} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{S_1^2}{S_2^2} f_{4;4;0,025}.$$

Aangezien $f_{4;4;0,025} = 9,6$ en $f_{4;4;0,975} = 1/9,6$, is het betrouwbaarheidsinterval gelijk aan $(0,14; 13,0)$. Dit interval bevat 1, dus de hypothese $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ kan niet verworpen worden ten gunste van $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.

(c) Omdat er twee onafhankelijke steekproeven zijn, gebruiken we de rangsomtoets van Wilcoxon (of equivalent, de toets van Mann-Whitney). De rangen van de eerste steekproef zijn 10, 7, 3, 8 en 2, dus de rangsom is 30. De linker kritieke waarde is 17 (zie tabel Statistisch Compendium), en dus is de rechter kritieke waarde gelijk aan $5.11 - 17 = 38$. Conclusie: we verwerpen $H_0 : F = G$ niet ten gunste van $H_1 : F(x) = G(x - \Delta)$ voor alle x. Hierbij zijn F en G de cumulatieve verdelingsfuncties van de twee steekproeven.

3. (a) $\log L = -n \log \beta - \sum_{i=1}^n X_i/\beta$, dus $\frac{\partial}{\partial \beta} \log L = -n/\beta + \sum_{i=1}^n X_i/\beta^2$. Dus $\widehat{\beta} = \sum_{i=1}^n X_i/n$.
Uit de onafhankelijkheid volgt dat $\sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Gamma}(n, 1/\beta)$ (pas op de verschillende parametrizeringen $\lambda = 1/\beta$). Bovendien geldt dat $P\left(\frac{2X_i}{\beta} < x\right) = P\left(X_i < \frac{\beta x}{2}\right) = e^{-x/2}$. Dus $2n\overline{X}/\beta$ is verdeeld volgens een Gamma(n,1/2) verdeling, wat hetzelfde is als een χ^2_{2n}-verdeling.

(b) Uit onderdeel a) volgt dat

$$1 - \alpha = P\left(\chi^2_{n;\alpha} < \frac{2n\overline{X}}{\beta} < \chi^2_{n;1-\alpha}\right) = P\left(\frac{2n\overline{X}}{\chi^2_{n;\alpha}} < \beta < \frac{2n\overline{X}}{\chi^2_{n;1-\alpha}}\right).$$

(c)

$$\Lambda = \frac{\frac{1}{\beta_0^n} \; e^{-\sum_{i=1}^n X_i/\beta_0}}{\frac{1}{\overline{X}^n} \; e^{-\sum_{i=1}^n X_i/\overline{X}}}.$$

Dus

$$\log \Lambda = n \log \frac{\overline{X}}{\beta_0} + \sum_{i=1}^n X_i/\overline{X} - \sum_{i=1}^n X_i/\beta_0 = n \log \frac{\overline{X_0}}{\beta_0} + n - n\frac{\overline{X}}{\beta_0}.$$

Verder geldt bij benadering dat $-2 \log \Lambda \sim \chi_1^2$. Het kritieke gebied wordt gegeven door $-2 \log \Lambda > \chi^2_{1;\alpha}$.

4. (a) Uit de vraag volgt dat we hier toetsen $H_0 : X_i \sim \text{Poisson}(\lambda)$ tegen $H_1 : X_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i)$. De hierbij behorende toets is de Poisson dispersietoets (en niet de χ^2-aanpassingstoets). Toetsingsgrootheid is $\frac{\sum_{i=1}^8 \left(X_i - \overline{X}\right)^2}{\overline{X}} = \frac{(8-1)S^2}{\overline{X}} = \frac{7.7,4}{4} = 12,95$ of (uitgaand van de likelihood ratio toets) $2\sum_{i=1}^8 X_i \log \frac{X_i}{\overline{X}} = 11,56$. Kritiek gebied: $T > \chi^2_{8-1;0,05} = 14,1$. Conclusie: H_0 niet verwerpen.

(b) $P(X \leq 2 \mid \lambda = 3) = 0,4232$, $P(3 \leq X \leq 4 \mid \lambda = 3) = P(X \leq 4 \mid \lambda = 3) - P(X \leq 3 \mid \lambda = 3) = 0,8153 - 0,4232 = 0,3921$ en $P(X \geq 5 \mid \lambda = 3) = 1 - P(X \leq 4 \mid \lambda = 3) = 1 - 0,8153 = 0,1847$.

(c)

	goed	acceptabel	slecht
verwacht	3,3856	3,1368	1,4776
waargenomen	2	4	2

.

Hieruit volgt dat de χ^2-toetsingsgrootheid gelijk is aan $X^2 = \sum_{i=1}^{3} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = \frac{(1{,}3856)^2}{3{,}3856} + \frac{(0{,}8632)^2}{3{,}1368} + \frac{(0{,}5224)^2}{1{,}4776} = 0,993$. Kritiek gebied: $X^2 > \chi^2_{3-1-1;0{,}05} = 3,84$. Conclusie: $H_0 : \lambda = 3$ niet verwerpen ten gunste van $H_1 : \lambda \neq 3$.

5. **versie Mathematische Statistiek 2S990**

(a) Merk eerst op dat $\frac{F_n(x+h) - F_n(x-h)}{2h} = \frac{\#\{i \colon |x - X_i| < h\}}{2h}$ en dat $\left| \frac{x - X_i}{h} \right| < 1 \Leftrightarrow |x - X_i| < h$. Hieruit volgt dat $\widehat{N}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{h} K\left(\frac{x - X_i}{h} \right)$ met $K(x) = 1/2$ als $|x| \leq 1$ en $K(x) = 0$ als $|x| > 1$.

(b) Uit de definitie van empirische verdelingsfunctie volgt dat $n\,(F_n(x+h) - F_n(x-h)) \sim \mathrm{Bin}\,(n, F(x+h) - F(x-h))$. Dus

$$E\,\widehat{N}_n(x) = \frac{n}{2h} \frac{F_n(x+h) - F_n(x-h)}{n} = \frac{F_n(x+h) - F_n(x-h)}{2h}$$

en

$$\mathrm{Var}\,\widehat{N}_n(x) = \frac{n}{2h} \frac{F_n(x+h) - F_n(x-h)}{n}.$$

Het is ook mogelijk de algemene formules voor de verwachting en variantie van een kernschatter te gebruiken, maar dit is iets meer werk.

5. **versie Mathematische Statistiek 1 2S210**

(a) $F = \frac{554{,}82/1}{86398/19} = 0,12 < f_{1;19;0{,}05}$, dus H_0 niet verwerpen.

(b) Gebruik de toets van Kruskal-Wallis. Rangsommen: $\overline{R}_{1.} = 11,1$, $\overline{R}_{2.} = 11,55$, $\overline{R}_{3.} = 10,0$. Totaal aantal waarnemingen: $n = 5+10+6 = 21$. Toetsingsgrootheid: $H = \frac{12}{21(21+1} \sum_{i=1}^{3} n_i \overline{R}_{i.}^2 - 3(21+1) = 0,23$. Kritiek gebied: $f_{1;19;0{,}05} = 4,38$. Conclusie: H_0 niet verwerpen.