TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Tentamen Mathematische Statistiek (2S990) op 28 november 2002, 9.00-12.00 uur.

U mag alleen gebruik maken van een onbeschreven Statistisch Compendium (dikt. nr. 2218) en van een zakrekenmachine. De uitwerkingen van de opgaven dienen gemotiveerd, duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden.

Puntenwaardering

1			2	3			4	5				6		
a	b	c		a	b	c		a	b	c	d	a	b	c
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

(Totaal 30 punten.)

---

1. Zij $X_1, \ldots, X_n$ een steekproef uit een exponentiële verdeling met parameter β, d.w.z. $f(x \mid \beta) = \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta}$ voor $x \geq 0$.
   (a) Vind een zuivere schatter voor β gebaseerd op $Y = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$.
   (b) Is $Y = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ een voldoende steekproefgrootheid voor β?
   (c) Construeer een 95%-betrouwbaarheidsinterval voor β gebaseerd op $\sum_{i=1}^{n} X_i$.

2. De levensduur van een component van een elektronisch apparaat is exponentieel verdeeld met parameter β, d.w.z. $f(x \mid \beta) = \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta}$ voor $x \geq 0$. Een steekproef van n zulke componenten wordt getest gedurende 5 uur. Door een communicatiefout worden niet de faaltijden geregistreerd, maar weet men na afloop alleen dat er m componenten stuk gegaan zijn tijdens de 5 testuren. Bepaal de Maximum-Likelihoodschatter voor β als functie van m en n.

3. (a) Als $X_1, \ldots, X_n$ een steekproef is uit een $N(\mu, \sigma^2)$-verdeling, laat dan zien dat de steekproefvariantie S^2 een zuivere schatter is voor σ^2.
   (b) Als Y een stochast is met een χ^2_ν-verdeling, bewijs dan dat $\mathbb{E}\sqrt{Y} = \sqrt{2}\,\frac{\Gamma(\nu+1)/2)}{\Gamma(\nu/2)}$. Aanwijzing: gebruik de formules voor de gammafunctie en de dichtheid van de χ^2-verdeling.
   (c) Als $X_1, \ldots, X_n$ een steekproef is uit een $N(\mu, \sigma^2)$-verdeling, laat dan zien dat de steekproefstandaardafwijking S geen zuivere schatter is voor σ.

4. Zij $X_1, \ldots, X_n$ een steekproef uit een Poissonverdeling met parameter λ. Leid een Generalized-Likelihood-Ratio-toets af voor de toets $H_0 : \lambda = 1$ tegen $H_a : \lambda \neq 1$. Geef duidelijk aan wat de toetsingsgrootheid en een (benaderend) kritiek gebied zijn.

5. Een lijnmanager wil inzicht in de assemblagetijd van een bepaald product. Uit eerdere studies is gebleken dat de assemblagetijd bij benadering normaal verdeeld is met $\mu = 30$ seconden. De variantie is niet precies bekend, maar zeker is dat $2 \leq \sigma^2 \leq 3$.

   (a) Hoeveel waarnemingen moet de lijnmanager minimaal doen als zij een 95%-betrouwbaarheidsinterval wil met een breedte van ten hoogste 0,8 seconden?

   (b) De lijnmanager wil graag aantonen de assemblagetijd minder dan 30 seconden bedraagt. Hoeveel waarnemingen moet zij minimaal doen als zij met 90% kans de nulhypothese wil verwerpen als de echte waarde voor μ gelijk is aan 29,0? U mag bij deze vraag aannemen dat $\sigma^2 = 2$.

   De lijnmanager doet 10 waarnemingen met de volgende uitkomsten:

$$30,5 \quad 28,7 \quad 31,2 \quad 32,5 \quad 27,8 \quad 25,1 \quad 27,5 \quad 32,2 \quad 30,1 \quad 26,6$$

   (c) Toets of de lijnmanager gelijk had met het vermoeden dat de assemblagetijd minder dan 30 seconden bedraagt. Neem $\alpha = 0,05$. Neem aan dat de data normaal verdeeld zijn en doe geen veronderstellingen omtrent de waarde van σ^2.

   (d) Was de aanname omtrent de varianties in het begin van de opgave terecht? U mag aannemen dat de data normaal verdeeld zijn.

6. Volgens de wet van Hardy en Weinberg uit de erfelijkheidsleer is de kansverdeling van de bloedtypen M, MN en N als volgt

bloedtype	M	MN	N
kans	$(1-\gamma)^2$	$2\gamma(1-\gamma)$	γ^2

   waarbij $\gamma \in [0, 1]$ een onbekende parameter is. Een steekproef van omvang 1029 genomen uit de Chinese bevolking van Hong Kong in 1937 levert de volgende tabel op:

bloedtype	M	MN	N
aantal	342	500	187

   (a) Toets met $\alpha = 0,05$, of de data overeenkomen met de wet van Hardy en Weinberg als we voor γ de waarde 0,3 nemen.

   (b) Laat zien dat de Maximum-Likelihoodschatting (MLE) voor γ gelijk is aan 874/2058.

   (c) Toets, met $\alpha = 0,05$, of de data overeenkomen met de wet van Hardy en Weinberg.