Uitwerkingen Tentamen Mathematische Statistiek (2S990) op donderdag 28 november 2002, 9.00-12.00 uur.

---

1. (a) $P(\min(X_1, \ldots, X_n) \geq t = \prod_{i=1}^n P(X_i \geq t) = e^{-nt\beta}$, dus $Y \sim e^{\beta/n}$. Dus $\mathbb{E}Y = \beta/n$ and $\mathbb{E}nY = \beta$. We concluderen dat nY een zuivere schatter is voor β.

   (b) De voorwaardelijke dichtheid van $(X_1, \ldots, X_n)$ gegeven $Y = y$ is gelijk aan

$$\frac{\frac{1}{\beta^n}\, e^{-\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\beta}}}{\frac{n}{\beta} e^{-y\frac{n}{\beta}}} = \frac{e^{\frac{ny-\sum_{i=1}^n x_i}{\beta}}}{n\beta^{n-1}}.$$

   Een andere mogelijkheid is gebruik te maken van het factorisatiecriterium: $\frac{n}{\beta} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\beta}}$ kan niet geschreven worden in de vorm $g(x_{(1)}, \beta)\, h(x_1, \ldots, x_n)$. (-1/2 pt als niet genoemd wordt dat het factorisatiecriterium gebruikt wordt). In beide gevallen is de conclusie dat Y geen voldoende steekproefgrootheid is voor β.

   (c) Uit $\frac{2\sum_{i=1}^n X_i}{\beta} \sim \chi^2_{2n}$ volgt dat

$$0,95 = P\left(\chi^2_{2n;0,025} < \frac{2\sum_{i=1}^n X_i}{\beta} < \chi^2_{2n;0,975}\right) = P\left(\frac{2\sum_{i=1}^n X_i}{\chi^2_{2n;0,975}} < \beta < \frac{2\sum_{i=1}^n X_i}{\chi^2_{2n;0,025}}\right).$$

   Een 95-%-betrouwbaarheidsinterval voor β wordt dus gegeven door $\left(\frac{2\sum_{i=1}^n X_i}{\chi^2_{2n;0,975}}, \frac{2\sum_{i=1}^n X_i}{\chi^2_{2n;0,025}}\right)$.

   Opmerking: -1/2 punt als de quantielen verwisseld zijn.

2. We nemen uren als tijdseenheid en leggen daarmee de interpretatie van β vast. Het aantal foute componenten na 5 uur is dan binomiaal verdeeld met parameters n en $p = 1 - e^{-5/\beta}$. Bekend is dat de ML-schatter $\widehat{p}$ voor p in dit geval geschreven kan worden als m/n. Vanwege het invariantie-principe voor ML-schatter geldt dan dat $\widehat{\beta} = -\frac{5}{\log(1-m/n)}$. (-1/2 pt als niet genoemd wordt dat het invariantie principe gebruikt wordt).

3. (a) Omdat we een extra, overbodig, gegeven hebben dat $X_1, \ldots, X_n$een steekproef is uit een $N(\mu, \sigma^2)$-verdeling, kunnen hier een kort bewijs geven: $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$, dus $\mathbb{E}S^2 = \frac{\sigma^2}{n-1}(n-1) = \sigma^2$. Dus S^2 is een zuivere schatter voor σ^2.

   (b)

$$\mathbb{E}\sqrt{Y} = \int_0^\infty t^{1/2} \frac{e^{-t/2}\, t^{\frac{\nu-2}{2}}}{2^{\nu/2}\,\Gamma(\nu/2)}\, dt = \int_0^\infty \frac{e^{-t/2}\, t^{\frac{(\nu+1)-2}{2}}}{2^{\nu/2}\,\Gamma(\nu/2)}\, dt =$$

$$\frac{2^{(\nu+1)/2}\,\Gamma((\nu+1)/2)}{2^{\nu/2}\,\Gamma(\nu/2)} \int_0^\infty \frac{e^{-t/2}\, t^{\frac{(\nu+1)-2}{2}}}{2^{(\nu+1)/2}\,\Gamma((\nu+1)/2)}\, dt = \sqrt{2}\,\frac{\Gamma(\nu+1)/2)}{\Gamma(\nu/2)}.$$

   (c) Uit b) volgt dat $\mathbb{E}\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}} = \sqrt{2}\,\frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma((n-1)/2)}$, dus $\mathbb{E}S = \sigma\,\sqrt{2}\,\frac{\Gamma(n/2)}{\sqrt{(n-1)}\,\Gamma((n-1)/2)} \neq \sigma$ (vul bijvoorbeeld $n = 2$ in).

4. De Generalized-Likelihood-Ratio Λ is gelijk aan $\Lambda = \frac{\max_{\lambda=1} \prod_{i=1}^n P(X_i=x_i)}{\max_{\lambda \geq 0} \prod_{i=1}^n P(X_i=x_i)} = \frac{e^{-n} \frac{1}{\prod_{i=1}^n x_i!}}{e^{-n\overline{x}} \frac{\overline{x}^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!}} = e^{-n(1-\overline{x})}\, \overline{x}^{-\sum_{i=1}^n x_i}$, dus $-2\log\Lambda = 2n\,(1-\overline{x}+\overline{x}\log\overline{x})$ (1pt). Aangezien $-2\log\Lambda$ bij benadering χ^2_1 verdeeld is, kan een benaderend kritieke gebied geschreven worden als $2n\,(1-\overline{x}+\overline{x}\log\overline{x}) > \chi^2_{1,\alpha}$ (1pt). Opmerking: dit gebied kan exact bepaald worden door op te merken dat de toetsingsgrootheid een stijgende functie van $\overline{x}$ is. Aangezien $\sum_{i=1}^n X_i \sim \mathrm{Poi}(n\lambda)$, leidt dit tot een kritiek gebied in termen van een Poissonverdeling.

5. (a) Als σ^2 bekend zou zijn, dan is het 95%-betrouwbaarheidsinterval $\overline{x} \pm 1,96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Het interval is dus het breedst als $\sigma = \sqrt{3}$ en de breedte is dan $2\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}}$ (-1/2 punt als factor 2 vergeten). Als we dit invullen, vinden we dat de minimale steekproefomvang n moet voldoen aan $n \geq \left(\frac{2*1,96*\sqrt{3}}{0,8}\right)^2 = 72,03$, dus $n \geq 73$.(-1/2 punt als naar beneden is afgerond).

   (b)

$$\begin{aligned}
0,9 &\geq P\left(\frac{\overline{X}-30}{\sqrt{2/n}} < -z_\alpha \mid \overline{X} \sim N(29, 2/n)\right) \\
&= P\left(\overline{X} - 30 < -z_\alpha\sqrt{2/n} \mid \overline{X} \sim N(29, 2/n)\right) \\
&= P\left(\overline{X} - 29 < 1 - z_\alpha\sqrt{2/n} \mid \overline{X} \sim N(29, 2/n)\right) \\
&= P\left(\frac{\overline{X}-29}{\sqrt{2/n}} < \sqrt{n/2} - z_\alpha \mid \overline{X} \sim N(29, 2/n)\right) \\
&= P\left(Z < \sqrt{n/2} - z_\alpha\right).
\end{aligned}$$

   Hieruit volgt dat $\sqrt{n/2} - z_\alpha \geq z_{0,1} \leftrightarrow n \geq 2\,(1,28+z_\alpha)^2$. Het is toegestaan om bijvoorbeeld $\alpha = 0,05$ te nemen. Dit levert $n \geq 17,1$, dus n moet minimaal 18 zijn.

   (c) Uit de data volgt dat $\overline{x} = 29,22$ en $s = 2,47$, dus de toetsingsgrootheid $T = \frac{29,22-30}{2,47/\sqrt{10}} = -0,977$. Aangezien $H_0 : \mu = 30$ getoetst wordt tegen $H_1 : \mu < 30$ (-1/2 pt als de toets tweezijdig wordt uitgevoerd), is het kritieke gebied gelijk aan $T < -t_{9;0,05} = -1,83$. Conclusie: H_0 niet verwerpen. De data leveren dus onvoldoende aanwijzingen voor het vermoeden van de lijnmanager.

   (d) Deze vraag is bewust enigszins vaag gesteld, om meerdere correcte antwoorden mogelijk te maken. Uit de data volgt dat $s^2 = 6,12$. Aangezien $\chi^2_{9;0,975} = 19,0$ en $\chi^2_{9;0,025} = 2,7$, volgt dat het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor σ^2 gelijk is aan $\left(\frac{9s^2}{\chi^2_{9;0,975}}, \frac{9s^2}{\chi^2_{9;0,0255}}\right) = (2,9; 20,4)$. Aangezien dit interval vrijwel geheel buiten het interval $(2,3)$ ligt, was de aanname omtrent de variantie in het begin van de opgave dus niet terecht. Een andere aanpak is via toetsen van enkelzijdige hypotheses omtrent σ^2 met aangepast α om de type I fout te beheersen. N.B.: opmerken dat s^2 groter is dan 3 is een onvoldoende argument en levert geen punten op.

6. (a) Uit de eigenschappen van de multinomiale verdeling volgt dat de verwachte aantallen voor de bloedgroepen M, MN en N als $\gamma = 0,3$ gelijk zijn aan $1029*0,7^2 = 504$,

$1029{*}2{*}0,3{*}0,7 = 432$ en $1029{*}0,3^2 = 93$. De toetsingsgrootheid X^2 voor de aanpassingstoets heeft dus als waarde $\frac{(342-504)^2}{504}+\frac{(500-432)^2}{432}+\frac{(187-93)^2}{93} = 52+11+98 = 161$. Het kritieke gebied is $X^2 > \chi^2_{2;0,95} = 5,99$ (-1/2 pt indien tweezijdig kritiek gebied wordt genomen; -1/2 pt indien verkeerd aantal vrijheidsgraden). Conclusie: de data komen niet overeen met de wet van Hardy en Weinberg indien $\gamma = 0,3$.

(b) Aangezien we hier met een multinomiale verdeling hebben te maken, is de likelihood gelijk aan $\lambda = \binom{1029}{342;500;187}(1-\gamma)^{2*432}\, 2^500\gamma^500(1-\gamma)^500\, \gamma^{2*187} = \binom{1029}{342;500;187}\gamma^{874}(1-\gamma)^{1184}$. Optimaliseren van λ als functie van γ is hetzelfde als optimaliseren van $874\log\gamma + 1184\log(1-\gamma)$. Differentiëren levert dat het optimum bereikt wordt bij $\frac{874}{874+1184} = 874/2058$, hetgeen dus de ML-schatting voor γ is. (-1/2 pt als multinomiaalcoëfficiënt vergeten is in de likelihood)

(c) Uit de eigenschappen van de multinomiale verdeling volgt dat de verwachte aantallen voor de bloedgroepen M, MN en N als $\gamma = 874/2058$ gelijk zijn aan $340,6$, $502,8$ en $185,6$. De toetsingsgrootheid is hier gelijk aan $0,03$. Het kritieke gebied is $X^2 > \chi^2_{1;0,95} = 3,84$ (-1/2 pt indien tweezijdig kritiek gebied wordt genomen; -1/2 pt indien verkeerd aantal vrijheidsgraden). De waarnemingen komen dus overeen met de wet van Hardy en Weinberg als we de ML-schatting voor γ gebruiken.