Uitwerkingen Tentamen Mathematische Statistiek (2S990) op donderdag 27 november 2003, 9.00-12.00 uur.

De notatie voor quantielen van de χ^2-verdeling volgt de conventie $P(\chi^2_n < \chi^2_{n;\alpha}) = \alpha$.

---

1. (a) De likelihood is hier

$$\Lambda(t_1, \ldots, t_m; p) = \prod_{i=1}^{m} \varphi^{(n-i+1)(t_i-1)} (1-\varphi)^{n-i+1} = \varphi^{\sum_{i=1}^{m}(n-i+1)\,t_i} \prod_{i=1}^{m} (1-\varphi)^{n-i+1}.$$

Uit het factorisatiecriterium met volgt nu dat $\sum_{i=1}^{m}(n-i+1)\,T_i$ een voldoende steekproefgrootheid is voor φ.

(b) De likelihood is hier $(1-\varphi^2)\,\varphi^{2(t_1-1)}\,(1-\varphi)\,\varphi^{t_2-1} = \varphi^{2t_1+t_2-3}\,(1-\varphi)^2\,(1+\varphi)$. Logaritme nemen en afgeleide gelijk aan 0 stellen levert dat de ML-schatter voor φ moet voldoen aan $\frac{(2t_1+t_2-2)}{\varphi} - \frac{2}{1-\varphi} + \frac{1}{1+\varphi} = 0$. Onder één noemer brengen levert op dat $(2t_1+t_2)\varphi^2 + \varphi + (3-2t_1-t_2) = 0$. Aangezien $0 < \varphi < 1$, volgt hieruit welke van de twee oplossingen voldoet.

2. Er geldt dat $E\,X_i = 1$ en $\mathrm{Var}\,X_i = 1$. De Centrale Limietstelling levert nu dus dat $\frac{(\sum_{i=1}^{n} X_i)-n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0,1)$ als $n \to \infty$.

3. Er geldt dat $0 < \mathrm{Var}\,(\widehat{\Theta}) = E\widehat{\Theta}^2 - \left(E\widehat{\Theta}\right)^2$, dus $E\widehat{\Theta}^2 \neq \left(E\widehat{\Theta}\right)^2 = \theta^2$.

4. (a) Zij k de gerealiseerde waarde van K. De waarnemingen hier zijn de tijdstippen T_i, $i = 1, \ldots, k$ plus de gecensureerde informatie dat $T_{k+1} > t$. We hebben dus niet te maken met een gewone steekproef. Uit de gegevens volgt dat $T_i - T_{i-1}$ exponentieel verdeeld is met parameter λ, waarbij we $T_0 = 0$ definiëren. De likelihood moet de gecensureerde informatie meenemen en is daardoor dus

$$\Lambda(t_1, \ldots, t_k, t; \lambda) = \left(\prod_{i=1}^{k} \lambda\, e^{-\lambda\,(t_i - t_{i-1})}\right) e^{-\lambda(t-t_k)} = \lambda^k\, e^{-\lambda(t_0-t)} = \lambda^k\, e^{-\lambda t}.$$

Door een logaritme te nemen en de afgeleide gelijk aan 0 te stellen volgt dat $\widehat{\lambda}_{ML} = K/t$. (2 pt)

Aangezien de storingen onafhankelijk optreden en de tijden tussen 2 storingen exponentieel verdeeld zijn met parameter λ, volgt dat K een Poissonverdeling heeft met parameter $\lambda\,t$. De verwachting van K is dus $\lambda\,t$, waaruit volgt dat K/t een zuivere schatter is voor λ. (1 pt)

(b) Merk op dat dit geen standaardsituatie is vanwege het stochastisch aantal waarnemingen en daarmee samenhangende de gecensureerde waarneming. (1pt).

De bij a) gevonden likelihood suggereert echter dat de stochast K een voldoende steekproefgrootheid (1pt)

Om aan te tonen dat K/t minimale variantie heeft, zou men dus een variant van de stelling van Lehmann-Scheffé nodig hebben of een variant van de ondergrens van Cramér-Rao (1pt).

5. Het steekproefgemiddelde $\overline{X}$ is een voldoende steekproefgrootheid voor de parameter θ. Uit de eigenschappen van de χ^2 verdeling volgt dat $2n\overline{X}/\theta$ verdeeld is volgens een χ^2_{2n}-verdeling (er is natuurlijk een equivalente uitspraak in termen van de Gammaverdeling). Een 95%-betrouwbaarheidsinterval volgt nu door het inverteren van de volgende uitspraak over de quantielen van de χ^2-verdeling:

$$P\left(\chi^2_{2n;\ 0{,}025} < \frac{2n\overline{X}}{\theta} < \chi^2_{2n;\ 0{,}975}\right) = 0,95 \Longleftrightarrow P\left(\frac{\chi^2_{2n;\ 0{,}975}}{2n\overline{X}} < \theta < \frac{\chi^2_{2n;\ 0{,}025}}{2n\overline{X}}\right) = 0,95.$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval wordt dus gegeven door $\left(\frac{\chi^2_{2n;\ 0{,}975}}{2n\overline{X}}, \frac{\chi^2_{2n;\ 0{,}025}}{2n\overline{X}}\right)$.

6. (a)

$$\begin{aligned}
0,95 &= P\left(H_0 \text{ verwerpen} \mid \mu = 69\right) \\
&= P\left(\frac{\overline{X}-68}{2,25/\sqrt{n}} > 1,645 \middle| \mu = 69\right) \\
&= P\left(\frac{\overline{X}-69}{2,25/\sqrt{n}} > 1,645 - \frac{1}{2,25/\sqrt{n}} \middle| \mu = 69\right) \\
&= P\left(Z > 1,645 - \frac{\sqrt{n}}{2,25}\right)
\end{aligned}$$

Aangezien $P(Z > -1,645) = 0,95$, moet dus gelden dat $1,645 - \frac{\sqrt{n}}{2{,}25} \leq -1,645$, ofwel $\sqrt{n} \geq (1,645 + 1,645)2,25 = 7,4025$. Eindantwoord: $n \geq 54,79$, dus minimaal 55 vrouwelijke studenten dienen gewogen te worden.

(b) Er geldt dat $\left(\overline{X} - 1,96\frac{2{,}25}{\sqrt{55}}, \overline{X} + 1,96\frac{2{,}25}{\sqrt{55}}\right)$ een 95%-betrouwbaarheidsinterval voor μ is.

(c) We toetsen $H_0 : \mu_2 - \mu_1 = 10$ tegen $H_1 : \mu_2 - \mu_1 > 10$. Het kritieke gebied is $Z > 1,645$. De toetsingsgrootheid is $Z = \frac{79{,}2 - 67{,}8 - 10}{2{,}25\sqrt{\frac{1}{15} + \frac{1}{10}}} = 1,52$. Conclusie: H_0 niet verwerpen.

Opmerking: een tweezijdige toets is hier minder voor de hand liggend aangezien in het algemeen mannen zwaarder gebouwd zijn dan vrouwen. Een correct uitgevoerde tweezijdige toets wordt echter wel goed gerekend.

7. De GLR toets is gebaseerd op het quotiënt van twee likelihoods, nl. het quotiënt van $\Lambda_{H_0}(x_1, \ldots, x_n; \lambda) = e^{-n}/\prod_{i=1}^n x_i!$ en $\Lambda_{H_0 \cup H_1}(x_1, \ldots, x_n; \lambda) = \sup_{\lambda > 0} \prod_{i=1}^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}$. Bekend is dat $\Lambda_{H_0 \cup H_1}(x_1, \ldots, x_n; \lambda)$ gemaximaliseerd wordt door $\lambda = \overline{x}$ te kiezen (dit is nl. de ML-schatting voor λ). Er geldt dus dat

$$\frac{\Lambda_{H_0}(x_1, \ldots, x_n; \lambda)}{\Lambda_{H_0 \cup H_1}(x_1, \ldots, x_n; \lambda)} = \frac{e^{-n}/\prod_{i=1}^n x_i!}{\prod_{i=1}^n \overline{X}^{X_i} e^{-\overline{X}}/x_i!} = \frac{e^{-n}/\prod_{i=1}^n x_i!}{\overline{X}^{n\overline{X}} e^{-n\overline{X}}/\prod_{i=1}^n x_i!} = \frac{e^{n\overline{X}-n}}{\overline{X}^{n\overline{X}}}$$

Een benaderend kritiek gebied voor deze toets kan gevonden worden m.b.v. het feit dat -2 keer de logaritme van deze toetsingsgrootheid bij benadering x_1^2 verdeeld is met bijbehorend kritiek gebied $(\chi^2_{1;1-\alpha}, \infty)$, d.w.z $n(1 - \overline{X}) + n\overline{X} \log \overline{X} > \frac{1}{2}\chi^2_{1;1-\alpha}$.

8. Merk eerst op dat de informaticus impliciet zegt dat $(100 - 10 - 5 - 25 - 40) = 20\%$ overige oorzaken zijn voor crashes. We toetsen dus of de multinomiale verdeling van het aantal crashes de volgende succeskansen heeft: $p_1 = 0,1$, $p_2 = 0,05$, $p_3 = 0,25$, $p_4 = 0,4$ en $p_5 = 0,2$. De nulhypothese is dus H_0: $p_1 = 0,1$, $p_2 = 0,05$, $p_3 = 0,25$, $p_4 = 0,4$ en $p_5 = 0,2$ tegen het alternatief dat tenminste één van deze kansen daarvan afwijkt. Onder de nulhypothese verwachten we dus $150 \times 0,1 = 15$, $150 \times 0,1 = 15$, $150 \times 0,05 = 7,5$, $150 \times 0,25 = 37,5$, $150 \times 0,4 = 60$ en $150 \times 0,2 = 30$ fouten in de respectievelijke categorieën. De bijbehorende toetsingsgrootheid is gelijk aan

$$\sum_{i=1}^{5} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = \frac{2^2}{15} + \frac{2,5^2}{7,5} + \frac{4,5^2}{37,5} + \frac{5^2}{60} + \frac{10^2}{30} = 5,39.$$

Aangezien het kritieke gebied voor deze toets gegeven wordt door $(\chi^2_{5-1;0,95}, \infty) = (9,49; \infty)$, mogen we H_0 dus niet verwerpen:

9. We toetsen hier $H_0 : X_i \sim \text{Poisson}(\lambda)$ voor een zekere λ tegen het alternatief dat de X_i niet Poisson verdeeld zijn of niet allemaal dezelfde Poissonverdeling volgen. Aangezien de Poissonverdeling discreet is, kunnen we hier een χ^2-aanpassingstoets toepassen. We hebben de volgende aantallen waarnemingen per categorie:

aantal krassen per scherm	0	1	2	3	4	5
waargenomen aantal schermen	3	7	11	7	3	1

Aangezien we hier beschikken over alle individuele waarnemingen, kunnen we de onbekende λ schatten door de ML-schatting $\overline{x} = 2,09$. Uit het invariantieprincipe volgt nu dat de verwachte aantallen per categorie berekend kunnen worden uitgaande van celkansen gebaseerd op een Poissonverdeling met $\lambda = 2,09$. Dit levert de volgende tabel met verwachte aantallen per categorie op:

aantal krassen per scherm	0	1	2	3	4	≥ 5
verwacht aantal schermen	3,96	8,27	8,64	6,02	3,14	1,97

Het verwachte aantal ≥ 5 is gebaseerd op $32 * (1 - P(X \leq 4 \mid X \sim \text{Poisson}(2,09)) = 32 - 3,96 - 8,27 - 8,64 - 6,02 - 3,14 = 1,97$. Om de χ^2-benadering voor de gebruikelijke toetsingsgrootheid te mogen gebruiken, dienen de verwachte celaantallen alle groter dan 5 te zijn. Daarom voegen we enkele cellen samen:

aantal krassen per scherm	≤ 1	2	3	≥ 4
waargenomen aantal schermen	10	11	7	4
verwacht aantal schermen	12,23	8,64	6,02	5,11

De bijbehorende χ^2-toetsingsgrootheid is dus

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = \frac{(10 - 12,23)^2}{12,23} + \frac{(11 - 8,64)^2}{8,64} + \frac{(7 - 6,02)^2}{6,02} + \frac{(4 - 5,11)^2}{5,11} = 1,45.$$

Aangezien het kritieke gebied voor deze toets gegeven wordt door $(\chi^2_{4-1-1;0,95}, \infty) = (5,99; \infty)$, mogen we H_0 dus niet verwerpen: het aantal krassen op een LCD-scherm kan dus goed beschreven worden met een Poissonverdeling.

De notatie voor quantielen van de χ^2-verdeling volgt de conventie $P(\chi^2_n < \chi^2_{n;\alpha}) = \alpha$.