TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Tentamen Mathematische Statistiek (2S990) op 25 november 2005, 9.00-12.00 uur.

U mag alleen gebruik maken van een onbeschreven Statistisch Compendium (dikt. nr. 2218) en van een zakrekenmachine. De uitwerkingen van de opgaven dienen gemotiveerd, duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden.

Puntenwaardering

1			2	3		4				5
a	b	c		a	b	a	b	c	d	
2	2	2	3	2	2	3	3	3	4	4

(Totaal 30 punten.)

---

1. Een student wil zijn vaardigheid in wedstrijdtennis vergroten. Hij richt zich op zijn service, aangezien slechts 40% van zijn services goed zijn. Na een aantal lessen onderzoekt de student of zijn service verbeterd is door 20 keer te serveren. Als 13 of meer services goed zijn, dan besluit de student dat de lessen succes hebben gehad.
   (a) Formuleer de bovenstaande situatie als een toetsingsprobleem. Noem daarbij expliciet het stochastisch model, de toetsingsgrootheid, de hypothesen en het kritieke gebied.
   (b) Bereken de kans op een type I fout voor dit toetsingsprobleem.
   (c) Bereken het onderscheidingsvermogen als de student na de lessen een succeskans van 60% heeft bij serveren.

2. Zij $X_1, \ldots, X_n$ een steekproef uit een exponentiële verdeling met onbekende verwachting θ. Bepaal constanten c_1 en c_2 opdat het interval $\left(c_1\overline{X}, c_2\overline{X}\right)$ een 95% - betrouwbaarheidsinterval is voor θ.

3. Zij $X_1, \ldots, X_n$ een steekproef uit een verdeling met dichtheid $3x^2\theta^{-3}$ voor $0 < x < \theta$.
   (a) Laat zien dat $P\left(c < \max_{1 \le i \le n} X_i/\theta < 1\right) = 1 - c^{3n}$ wanneer $0 < c < 1$.
   (b) Bereken een 95% - betrouwbaarheidsinterval voor θ als $n = 4$ en $\max(X_1, X_2, X_3, X_4) = 2,3$. U mag gebruik maken van het resultaat van onderdeel a), ook als U dat onderdeel niet heeft kunnen maken.

4. Zij $X_1, \ldots, X_n$ een steekproef uit een Weibullverdeling met verdelingsfunctie $F_\theta(x) = 1 - \exp(-x^2/\theta)$ voor $x \ge 0$. De parameter θ is positief en onbekend.
   (a) Toon aan dat $\widehat{\theta}_{ML}$, de Maximum Likelihood schatter voor θ, gelijk is aan $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$.

(b) Bepaal een voldoende steekproefgrootheid voor θ.

(c) Bepaal de Cramér-Rao ondergrens voor zuivere schatters voor θ.

(d) Toon aan dat $\sqrt{n}\left(\widehat{\theta}_{ML} - \theta\right)$ in verdeling convergeert naar een normale verdeling als $n \to \infty$. Wat is de variantie van deze asymptotische normale verdeling? Gebruik deze informatie om een asymptotisch 90% - betrouwbaarheidsinterval voor θ op te stellen.

5. Zij $X_1, \ldots, X_n$ een steekproef uit een kansdichtheid gegeven door $\theta(1-x)^{\theta-1}$ voor $0 < x < 1$. Beschrijf de meest onderscheidende toets (UMP toets; de toets met maximaal onderscheidingsvermogen) voor het toetsen van $H_0 : \theta = 1$ tegen $H_1 : \theta > 1$. Geef duidelijk aan welke stellingen en lemma's U gebruikt.