

TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Tentamen Mathematische Statistiek (2S990) / Mathematische Statistiek 1 (2S210) op vrijdag 25 januari 2002, 9.00-12.00 uur.

U mag alleen gebruik maken van een onbeschreven Statistisch Compendium (dikt. nr. 2218) en van een zakrekenmachine. De uitwerkingen van de opgaven dienen gemotiveerd, duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden.

1. Zij X_1, \dots, X_n een steekproef uit de volgende verdeling:

$$f(x | \theta) = \begin{cases} e^{-(x - \theta)} & \text{indien } x \geq \theta \\ 0 & \text{indien } x < \theta \end{cases}.$$

We noteren $X_{(1)} = \min(X_1, \dots, X_n)$.

- (a) Laat zien dat X_i ($i = 1, \dots, n$) dezelfde verdeling heeft als $X + \theta$, waarbij X exponentieel verdeeld is met verwachting 1. Laat zien dat hieruit volgt dat $X_{(1)} - \frac{1}{n}$ een zuivere schatter is voor θ .
- (b) Leid een $100(1 - \alpha)\%$ betrouwbaarheidsinterval af voor θ door gebruik te maken van de resultaten van (a).
- (c) Laat zien dat de likelihood functie gelijk is aan

$$L(\theta | x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} e^{n\theta - \sum_{i=1}^n x_i} & \text{indien } \theta \leq x_{(1)} \\ 0 & \text{indien } \theta > x_{(1)} \end{cases}.$$

- (d) Laat zien dat $X_{(1)}$ een voldoende steekproefgrootte is voor θ .
- (e) Bepaal de generalized likelihood ratio toets voor het toetsen van $H_0 : \theta \leq \theta_0$ tegen $H_1 : \theta > \theta_0$.
2. We willen de verwachte opbrengst (in procenten) bepalen van een experimentele reactor. Het is voor verdere experimenten van belang dat deze verwachte opbrengst met een marge van ten hoogste 1,2% bepaald wordt. Neem aan dat de opbrengstmetingen normaal verdeeld zijn en dat uit eerdere metingen bekend is dat $\sigma^2 = 8,6$.

- (a) Hoeveel (onafhankelijke) opbrengstmetingen moeten we minimaal uitvoeren om met 95% zekerheid te kunnen zeggen dat de opbrengst binnen de gegeven marge ligt?

Metingen leveren de volgende opbrengsten op:

85,7 89,6 86,6 93,2

- (b) Toets met $H_0 : \mu = 90$ tegen $H_1 : \mu < 90$. Neem $\alpha = 0,05$.
- (c) Toets met $\alpha = 0,05$ of deze opbrengstmetingen in overeenstemming zijn met de uit eerdere metingen bepaalde waarde van σ^2 .

3. Een weerbestendige laklaag wordt in een oven via verhitting aangebracht op metalen platen. Als de oven optimaal werkt, is uit jarenlange ervaring bekend dat 10% van de platen die uit de oven komt een laklaag heeft met zodanige gebreken dat die plaat niet aan klanten geleverd kan worden. Alle platen worden geïnspecteerd nadat ze uit de oven komen.

- (a) Op een dag keuren de kwaliteitsinspecteurs 31 van de 200 platen af. Toets of de oven optimaal functioneert. Neem $\alpha = 0,05$.
- (b) Bereken een tweezijdig 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het percentage afgekeurde platen.

Op een dag wordt besloten de kwaliteit van de geproduceerde laklagen steekproefgewijs te controleren i.p.v. inspectie van alle platen. Er wordt een steekproef van 10 platen genomen uit de productie van een hele dag. Als deze steekproef 0 of 1 platen bevat die afgekeurd worden, dan wordt geconcludeerd dat de oven optimaal werkt. Als er 2 of meer platen afgekeurd worden, dan besluit men dat de oven bijgesteld moet worden.

- (c) Wat is de kans dat er ten onrechte geconcludeerd wordt dat de oven bijgesteld moet worden?
- (d) Wat is de kans dat men concludeert dat de oven optimaal functioneert, terwijl het echte percentage platen met een laklaag die afgekeurd moet worden 20% is?

4. In de theorie van Mendel wordt de kleur van bonen bepaald door genencombinaties. We beschouwen nu het eenvoudige geval waarin er drie genencombinaties zijn, nl. GG , GR en RR . De kans dat volgens de theorie van Mendel een willekeurige boon één van deze drie genencombinaties bezit is $(\frac{\theta}{\theta+1})^2$ voor GG , $\frac{2\theta}{(\theta+1)^2}$ voor GR en $\frac{1}{(\theta+1)^2}$ voor RR ($\theta \geq 0$). Elke boon bezit precies één genencombinatie.

Via een experiment willen we deze theorie nu onderzoeken. Een steekproef van 50 bonen uit de volkstuin van een ijverige statisticus leverde het volgende resultaat:

GG	GR	RR		totaal
8	17	25		50

- (a) Toets of de data overeenkomen met de theorie van Mendel als we $\theta = \frac{1}{2}$ veronderstellen. Neem $\alpha = 0,05$.

We veronderstellen nu dat θ onbekend is.

- (b) Laat zien dat de Maximum-Likelihoodschatting voor θ gelijk is aan $\frac{33}{67}$.
- (c) Toets of de data overeenkomen met de theorie van Mendel. Neem $\alpha = 0,05$.

Puntenwaardering

1	a	b	c	d	e	2	a	b	c	3	a	b	c	d	4	a	b	c
	2	2	2	2	2		2	2	2		2	2	2	2		2	2	2

(Totaal 30 punten.)