TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Tentamen Mathematische Statistiek (2S990) op 24 januari 2003, 9.00-12.00 uur.

U mag alleen gebruik maken van een onbeschreven Statistisch Compendium (dikt. nr. 2218) en van een zakrekenmachine. De uitwerkingen van de opgaven dienen gemotiveerd, duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden. Alle onderdelen van opgaven tellen even zwaar mee.

---

1. Een kwaliteitsafdeling van een bedrijf voert via steekproef controles uit op halfproducten voordat ze geassembleerd worden. We modelleren de controles als een rij stochasten $X_1, X_2, \ldots, X_m$ waarbij $X_i \sim \mathrm{Bin}(n,p)$, waarbij n de omvang van een steekproefcontrole is en p de kans dat een halfproduct niet geschikt is om geassembleerd te worden.

   (a) Wat is de Maximum-Likelihoodschatter voor de kans dat er in een controle geen ongeschikte halfproducten gevonden worden?

   (b) Laat zien dat de steekproefgrootheid gedefinieerd door
   $$U = \begin{cases} 0 & \text{indien } X_1 = 0 \\ 1 & \text{indien } X_1 > 0 \end{cases}$$
   een zuivere schatter is voor $P(X \neq 0)$, waarbij $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$.

   (c) Bepaal een voldoende steekproefgrootheid voor $P(X \neq 0)$, waarbij $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$.

   (d) Wat is de kleinste variantie die een zuivere schatter voor $P(X \neq 0)$, waarbij $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$, kan hebben?

   (e) Construeer expliciet een zuivere schatter met minimale variantie voor $P(X \neq 0)$, waarbij $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$.

2. Een manier om een toevalsgenerator voor de standaardnormale verdeling is te maken is als volgt. Uitgaande van een bestaande toevalsgenerator die een steekproef $U_1, U_2, \ldots, U_{12}$ genereert uit de uniforme verdeling op $(0,1)$, wordt $X = \left(\sum_{i=1}^{12} U_i\right) - 6$ gegenereerd. Geef duidelijk aan waarop deze methode gebaseerd is. Geef ook aan hoe geverifieerd kan worden of de veronderstelling van deze methode redelijk is (kort noemen van een toets volstaat).

3. Zij $X_1, \ldots, X_n$ een steekproef uit een $\mathrm{Bin}(1,p)$ verdeling en definieer $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

   (a) Onderzoek of $Y_n(1-Y_n)$ een zuivere schatter is voor $p(1-p)$.

   (b) Bepaal indien $p \neq \frac{1}{2}$ de asymptotische verdeling van $Y_n(1-Y_n)$.

4. We willen onderzoeken of er een sprongpunt zit in een reeks waarnemingen $X_1, \ldots, X_n$ van een waterstand, waarbij n even is. We nemen aan dat de waterstanden normaal verdeeld zijn met een bekende variantie σ_0^2. Leid een Generalized Likelihood Ratio toets af voor de volgende hypotheses: $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_n$ tegen $H_1 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_{\frac{n}{2}};\ \mu_1 + 2 = \mu_{\frac{n}{2}+1} = \ldots = \mu_n$. Geef duidelijk aan wat de toetsingsgrootheid en een (benaderend) kritiek gebied zijn. Hierbij is n even en $n \geq 4$.

5. Een kritieke maat van een gespoten plastic product heeft een streefwaarde van $\mu_0 = 100$. Aangezien dit product al jarenlang geproduceerd wordt mag men op grond van ervaring aanneming dat de kritieke maat van de producten normaal verdeeld is met $\sigma = 8$. Het probleem is dat vanwege verstoppingen, de verwachting van de kritieke maat niet altijd gelijk is aan de streefwaarde. Daarom neemt een operator periodiek een aselecte steekproef van 4 stuks.

   (a) Het gemiddelde van zo'n steekproef is 101,4. Ga na of de verwachting groter is dan de streefwaarde. Gebruik $\alpha = 0,01$.

   (b) Wat is het onderscheidingsvermogen van deze toets als de verwachting is veranderd in $\mu = 102$?

   (c) Hoe groot moet de steekproef zijn opdat de toets bij a) een onderscheidingsvermogen van 0,8 heeft als de verwachting is veranderd in $\mu = 102$?

   (d) Geef een 99%-betrouwbare ondergrens voor de verwachte kritieke maat μ op basis van het steekproefresultaat bij a).

6. De levensduren van 60 lampen van een bepaald type worden ruwweg vastgesteld door te registreren hoeveel van de 60 lampen nog branden na twee, resp. vier weken. De resultaten zijn als volgt:

levensduur x in weken	$0 < x < 2$	$2 \leq x < 4$	$x \geq 4$
aantal lampen (van de 60)	25	23	12

   (a) Toets of de levensduren afkomstig zijn uit een exponentiële verdeling. Neem $\alpha =$ 0,01.

   (b) Als bovendien gegeven is dat het gemiddelde van de 60 levensduren 4,1 weken is, wat is dan Uw antwoord op onderdeel a) ?