Uitwerkingen Tentamen Mathematische Statistiek (2S990) op vrijdag 24 januari 2003, 9.00-12.00 uur.

---

1. (a) De likelihood is hier $\Lambda(x_1, \ldots, x_m; p) = \prod_{i=1}^m \binom{n}{x_i}(1-p)^{n-x_i}\, p^{x_i}$. Log nemen en maximum bepalen via differentiëren levert dat de ML-schatter voor p gegeven wordt door $\widehat{p} = \frac{1}{nm}\sum_{i=1}^m X_i$. (1pt)

   De kans dat er in een controle geen ongeschikte halfproducten gevonden worden is $(1-p)^n$ (1/2 pt). Het invariantieprincipe levert nu dat de ML-schatter voor deze kans gegeven wordt door $(1-\widehat{p})^n$. (1/2 pt)

   (b) $E(U) = 0.P(X_1 = 0) + 1.P(X_1 > 0) = P(X_1 > 0) = P(X > 0) = P(X \neq 0)$. De laatste stap (1/2 pt) volgt uit het feit dat $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$.

   (c) Uit het factorisatiecriterium volgt dat $\sum_{i=1}^m X_i$ een voldoende grootheid is voor p. Aangezien $P(X \neq 0) = 1-(1-p)^n$ een functie is van p, volgt dat $\sum_{i=1}^m X_i$ ook een voldoende grootheid is voor $P(X \neq 0)$. Opmerking: ook $1 - \left(1 - \frac{1}{nm}\sum_{i=1}^m X_i\right)$ is een voldoende grootheid voor $P(X \neq 0)$; deze vorm is echter onnodig gecompliceerd.

   (d) De ondergrens van Cramér-Rao is de kleinste variantie voor een zuivere schatter voor $P(X \neq 0)$. Deze ondergrens wordt gegeven door

$$\frac{\tau'(p)^2}{mE\left(\frac{\partial}{\partial p} log f(X,p)\right)^2},$$

   waarbij $\tau(p) = 1-(1-p)^n$ en $f(X,p) = \binom{n,x}{}p^x\,(1-p)^{n-x}$. Aangezien $\tau'(p) = n(1-p)^{n-1}$ en

$$E\left(\frac{\partial}{\partial p} log f(X,p)\right)^2 = E\left(\frac{X-np}{p(1-p)}\right)^2 = \frac{1}{p^2(1-p)^2}\,Var(X) = \frac{n}{p(1-p)},$$

   volgt dat de ondergrens van Cramér-Rao in dit geval gelijk is aan $\frac{n}{m}\,p(1-p)^{2n-1}$.

   (e) Een zuivere schatter voor $P(X \neq 0)$ wordt gegeven door U uit onderdeel b). Door te conditioneren op de voldoende steekproefgrootheid $\sum_{i=1}^m X_i$ verkrijgen we een zuivere schatter met kleinere variantie (Stelling van Rao-Blackwell). Om de expliciete vorm van deze schatter te krijgen is de volgende berekening nodig:

$$\begin{aligned}
E\left(U \,\middle|\, \sum_{i=1}^m X_i = x\right) &= \frac{P\left(X_1 > 0 \cap \sum_{i=1}^m X_i = x\right)}{P\left(\sum_{i=1}^m X_i = x\right)} \\
&= \frac{P\left(\sum_{i=1}^m X_i = x\right) - P\left(X_1 = 0 \cap \sum_{i=1}^m X_i = x\right)}{P\left(\sum_{i=1}^m X_i = x\right)} \\
&= \frac{\binom{nm}{x}p^x(1-p)^{nm-x} - (1-p)^n\binom{n(m-1)}{x}p^x\,(1-p)^{n(m-1)x}}{\binom{nm}{x}p^x\,(1-p)^{nm-x}} \\
&= \frac{\binom{nm}{x} - \binom{n(m-1)}{x}}{\binom{nm}{x}}.
\end{aligned}$$

Een zuivere schatter voor $P(X \neq 0)$ is dus $T = \frac{\binom{nm}{\sum_{i=1}^m X_i} - \binom{n(m-1)}{\sum_{i=1}^m X_i}}{\binom{nm}{\sum_{i=1}^m X_i}}$. De klasse van binomiale verdelingen voor vaste n is volledig, want een polynoom is dan en slechts dan identiek 0 als alle coëfficiënten 0 zijn (zie boek). Uit het lemma van Lehmann-Scheffé volgt nu dat T een zuivere schatter met minimale variantie is voor $P(X \neq 0)$.

2. Er geldt dat $E\left(\sum_{i=1}^{12} U_i\right) = n * \frac{1}{2} = n/2$ en $V\left(\sum_{i=1}^{n} U_i\right) = n * \frac{1}{12} = \frac{n}{12}$. Uit de Centrale Limietstelling volgt dus dat $\frac{\left(\sum_{i=1}^n U_i\right) - n/2}{\sqrt{n/12}} \xrightarrow{d} N(0,1)$ als $n \to \infty$. Empirisch is gebleken dat deze convergentie voor sommen van uniforme verdelingen zeer snel gaat en dat 12 blijkbaar al groot genoeg is (1pt; alleen noemen van Centrale Limietstelling zonder formulering en uitrekenen van verwachting en variantie levert geen punten op).

   De veronderstelling van deze methode kan geverifieerd worden door een aantal toevalsgetallen te genereren en dan met grafische methoden (normal probability plot, kernschatter) en een toets (Shapiro-Wilks of Cramér-von Mises of Anderson - Darlin, NIET χ^2-toetsen) te controleren (1pt)

3. (a) $E(Y_n(1-Y_n)) = E(Y_n) - E(Y_n^2) = p - V(Y_n) - (E(Y_n))^2 = p - \frac{1}{n} p(1-p) - p^2 = \left(1 - \frac{1}{n}\right) p(1-p)$, dus $Y_n(1-Y_n)$ is geen zuivere schatter voor $p(1-p)$.

   (b) Aangezien $\frac{d}{dx} x(1-x) = 1 - 2x$, vinden we m.b.v. de stelling van Cramér (deltamethode) vinden we dat $\sqrt{n}\left(Y_n(1-Y_n) - p(1-p)\right) \xrightarrow{d} N(0, (1-2p)^2)$ als $n \to \infty$. Een alternatieve, omslachtiger methode, is te gebruiken dat vanwege het invariantieprincipe, $Y_n(1-Y_n)$ de Maximum Likelihoodschatter is voor $p(1-p)$ en dus asymptotisch normaal verdeeld is met als variantie de Fisher informatie.

4. We herschrijven beide hypotheses in termen van één enkele parameter μ. Daarna construeren we een toetsingsgrootheid d.m.v. het quotiënt van twee likelihoods, nl. het quotiënt van

$$\Lambda_{H_0}(x_1, \ldots, x_n; \mu) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(2\pi\sigma_0^2)^{n/2}} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma_0^2}}$$

en

$$\Lambda_{H_1}(x_1, \ldots, x_n; \mu) = \prod_{i=1}^{n/2} \frac{1}{(2\pi\sigma_0^2)^{n/2}} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma_0^2}} \prod_{i=n/2+1}^{n} \frac{1}{(2\pi\sigma_0^2)^{n/2}} e^{-\frac{(x_i-(\mu+2))^2}{2\sigma_0^2}}.$$

Bekend is dat $\Lambda_{H_0}(x_1, \ldots, x_n; \mu)$ gemaximaliseerd wordt door $\widehat{\mu} = \bar{x}$ te kiezen. Aangezien $\Lambda_{H_1}(x_1, \ldots, x_n; \mu) = \Lambda_{H_0}(x_1, \ldots, x_{n/2}, x_{n/2+1}-2, \ldots, x_n-2; \mu)$ volgt dat $\Lambda_{H_1}(x_1, \ldots, x_n; \mu)$ gemaximaliseerd wordt door $\widehat{\mu_1} = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n/2} x_i + \sum_{i=n/2+1}^{n} (x_i - 2)\right) = \bar{x} - 1$ te kiezen.

Er geldt dus dat

$$\begin{aligned}
\frac{\sup_{(\mu_1,\ldots,\mu_n)\in\Theta_1} \Lambda_{H_1}(x_1,\ldots,x_n;\mu)}{\sup_{(\mu_1,\ldots,\mu_n)\in\Theta_0} \Lambda_{H_0}(x_1,\ldots,x_n;\mu)} &= \frac{\prod_{i=1}^{n/2} e^{-\frac{(x_i-(\bar{x}-1))^2}{2\sigma_0^2}} \prod_{i=n/2+1}^{n} e^{-\frac{(x_i-(\bar{x}+1))^2}{2\sigma_0^2}}}{\prod_{i=1}^{n} e^{-\frac{(x_i-\bar{x})^2}{2\sigma_0^2}}} \\
&= e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\left(n+\sum_{i=1}^{n/2} 2(x_i-\bar{x})+\sum_{i=n/2+1}^{n} 2(\bar{x}-x_i)\right)} \\
&= e^{-\frac{1}{\sigma_0^2}\left(2n+\sum_{i=1}^{n/2} x_i-\sum_{i=n/2+1}^{n} x_i\right)}
\end{aligned}$$

Een benaderend kritiek gebied voor deze toets kan gevonden worden m.b.v. het feit dat 2 keer de logaritme van deze toetsingsgrootheid bij benadering x_1^2 verdeeld is.

5. (a) We toetsen $H_0 : \mu = 100$ tegen $H_1 : \mu > 100$. Het kritieke gebied is $Z > 2,33$. De toetsingsgrootheid is $Z = \frac{101{,}4-100}{8/\sqrt{4}} = 0,35$. Conclusie: H_0 niet verwerpen.

   (b)

$$\begin{aligned}
P\left(H_0 \text{ verwerpen} \mid \mu = 102\right) &= P\left(\frac{\bar{X}-100}{8/\sqrt{4}} > 2,33 \middle| \mu = 102\right) \\
&= P\left(\frac{\bar{X}-102}{8/\sqrt{n}} > 2,33 + \frac{100-102}{4} \middle| \mu = 102\right) \\
&= P\left(Z > 2,33 - 0,5\right) \\
&= P\left(Z > 1,83\right) \\
&= 0,0336.
\end{aligned}$$

   (c)

$$\begin{aligned}
P\left(H_0 \text{ verwerpen} \mid \mu = 102\right) &= P\left(\frac{\bar{X}-100}{8/\sqrt{n}} > 2,33 \middle| \mu = 102\right) \\
&= P\left(\frac{\bar{X}-102}{8/\sqrt{n}} > 2,33 + \frac{100-102}{8/\sqrt{n}} \middle| \mu = 102\right) \\
&= P\left(Z > 2,33 - \frac{\sqrt{n}}{4}\right)
\end{aligned}$$

   Aangezien $P(Z > 0,84) = 0,2$, moet dus gelden dat $2,33 - \frac{\sqrt{n}}{4} \leq 0,84$, ofwel $\sqrt{n} \geq (2,33+0,84)4 = 12,68$. Eindantwoord: $n \geq 161$.

   (d) Aangezien $P\left(\bar{X} - 2,33\frac{8}{\sqrt{4}}\right) = 0.99$, geldt dat $101,4 - 9,32 = 92,08$ een 99%-betrouwbare ondergrens voor μ is.

6. (a) We moeten eerst een Maximum Likelihoodschatting gebaseerd op de celaantallen maken: $\Lambda(n_1,n_2,n_3,\lambda) = \binom{60}{25;23;12}\left(1-e^{-2\lambda}\right)^{25}\left(e^{-2\lambda}-e^{-4\lambda}\right)^{23}\left(e^{-4\lambda}\right)^{12}$. Logaritme nemen en maximum bepalen door differentiëren levert $\widehat{\lambda} = \frac{1}{2}\log 3$ en dus $\widehat{e^{-2\lambda}} = \frac{1}{3}$. De toets is nu een χ^2 toets met $3-1-1 = 1$ vrijheidsgraad.

   (b) Hier is de Maximum Likelihoodschatting gelijk aan 4,1. De toets is nu een χ^2 toets met $3-1-1 = 1$ vrijheidsgraad (eigenlijk ligt de kritieke grens tussen $\chi^2_{1;0,01}$ en $\chi^2_{2;0,01}$; zoals in het boek uitgelegd wordt om de type I fout niet boven α uit te laten komen gekozen voor 1 vrijheidsgraad).