TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Tentamen Mathematische Statistiek (2S990) op 23 januari 2004, 9.00-12.00 uur.

U mag alleen gebruik maken van een onbeschreven Statistisch Compendium (dikt. nr. 2218) en van een zakrekenmachine. De uitwerkingen van de opgaven dienen gemotiveerd, duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden.

Puntenwaardering

1	2	3	4			5			6			7	8
			a	b	c	a	b	c	a	b	c		
2	2	2	2	2	2	3	2	2	2	2	3	2	2

(Totaal 30 punten.)

---

1. Bepaal de verdeling van de stochast $1/X$, als de stochast X een F_n^m-verdeling heeft.

2. Zij $X_1, \ldots, X_n$ een steekproef uit een Gammaverdeling met parameters α en λ, d.w.z. de dichtheid wordt gegeven door

$$f(x) = \lambda^\alpha \frac{x^{\alpha-1}\, e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}.$$

   Onderzoek of $\overline{X}$ een voldoende steekproefgrootheid is voor λ, als α bekend is.

3. Zij $X_1, \ldots, X_{500}$ een steekproef uit een geometrische verdeling met onbekende parameter p. Als uitkomst van de steekproef krijgen we $\sum_{i=1}^{500} X_i = 108$. Bepaal een 95%-betrouwbaarheidsinterval voor p.

4. De waarden $220, 205, 192, 198, 201, 207, 195, 201, 204$ vormen een steekproef uit een $N\left(\mu, \sigma^2\right)$-verdeling.

   (a) Toets $H_0\colon \mu = 204$ tegen $H_1\colon \mu > 204$.

   (b) Bepaal een getal c zodanig dat we met 95%-zekerheid weten dat $\mu > c$.

   (c) Bepaal een 95%-betrouwbaarheidsinterval voor σ^2.

5. Zij $X_1, \ldots, X_n$ een steekproef uit een $N\left(0, \sigma^2\right)$-verdeling.

   (a) Laat zien dat de Fisher informatie van X_1 gelijk is aan $2/\sigma^2$. U mag gebruiken dat $\mathrm{E}\, X_1^4 = 3\sigma^4$.

   (b) Laat zien dat $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ een zuivere schatter is voor σ^2.

   (c) Onderzoek of er een zuivere schatter is voor σ^2 met een kleinere variantie dan de schatter uit b).

6. Zij X_1, X_2, X_3 een steekproef uit een Poissonverdeling. We toetsen $H_0\colon \lambda = 2$ tegen $H_1\colon \lambda = 1$. Als kritiek gebied stelt iemand voor om verzamelingen van de vorm

$$G(c) = \big\{((x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{N}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 \leq c\big\}$$

te nemen.

(a) Laat via een berekening zien dat α, de type I fout, voor het gebied $G(2)$ gelijk is aan $0,062$.

(b) Bereken het onderscheidingsvermogen van $G(2)$.

(c) Is er een toets met $\alpha = 0,062$ die een groter onderscheidingsvermogen heeft dan de toets met kritiek gebied $G(2)$? Geef een uitvoerige motivatie voor Uw antwoord.

7. In verband met de nieuwe wetten t.a.v. roken is wordt het rookgedrag van Nederlanders onderzocht. Het rookgedrag van Nederlanders wordt in 4 categorieën verdeeld. Een steekproef levert het volgende resultaat op

categorie	rookt niet	gelegenheidsroker	lichte roker	kettingroker
percentage	46	11	27	16

Om te onderzoeken of deze percentages ook onder studenten gelden, doet het College van Bestuur van een zekere universiteit een steekproef onder studenten.

categorie	rookt niet	gelegenheidsroker	lichte roker	kettingroker
aantal	206	41	155	98

Toets met $\alpha = 5\%$ of de percentages tussen de gehele Nederlandse bevolking en de studenten verschillen.

8. Op een sporttoernooi voor studenten worden van elke student gewicht (G), lengte (L) en een globale indicatie van de sportprestatie (Y) bijgehouden. Een sportgezondheids-expert vermoedt er verband is tussen de grootheid $X = G/L^2$ en Y. Toets aan de hand van onderstaande data of het vermoeden van de expert redelijk lijkt. Neem $\alpha = 0,05$.

$X \downarrow\ Y \rightarrow$	slecht	gemiddeld	goed	uitstekend
≤ 20	5	6	8	6
$\in (20, 25]$	16	9	61	34
$\in (25, 30]$	12	18	10	5
> 30	11	9	5	5