TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Tentamen Mathematische Statistiek (2S990) op 26 januari 2006, 9.00-12.00 uur.

U mag alleen gebruik maken van een onbeschreven Statistisch Compendium (dikt. nr. 2218) en van een zakrekenmachine. De uitwerkingen van de opgaven dienen gemotiveerd, duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden.

Puntenwaardering

1			2	3		4				5
a	b	c		a	b	a	b	c	d	
2	3	2	3	3	2	3	2	3	3	4

(Totaal 30 punten.)

---

1. Men wil onderzoeken of er verschil is in de zijwindgevoeligheid van twee soorten bruggen. Omdat er hoge kosten aan het onderzoek verbonden zijn kan men slechts zes waarnemingen per brug doen. De waarnemingen zijn gebaseerd op een bepaalde niet-negatieve grootheid. De bruggen hebben op ieder tijdstip te maken met dezelfde weersomstandigheden.

Tijdstip	Brug 1	Brug 2
1	3,9	4,6
2	3,8	3,3
3	3,2	2,8
4	5,0	4,0
5	2,6	2,6
6	2,7	2,1

Veronderstel dat de waarnemingen normaal verdeeld zijn met alle dezelfde onbekende variantie.

(a) Toets of er verschil is in zijwindgevoeligheid tussen de twee soorten bruggen. Neem $\alpha = 0,05$.

Neem nu aan dat variantie van een enkele waarneming bekend is en gelijk is aan 1 (zowel voor de ene als de andere brug).

(b) Wat is het onderscheidingsvermogen voor de bij deze situatie horende toets voor het verschil in zijwindgevoeligheid als het werkelijke verschil gelijk is aan $0,8$?

(c) Hoeveel waarnemingen zouden er in totaal gedaan moeten worden om ervoor te zorgen dat men met 95% betrouwbaarheid het verschil in zijwindgevoeligheid kan schatten met een afwijking van ten hoogste $0,5$?

2. Zij $X_1, \ldots, X_n$ een steekproef uit een Bernoulliverdeling met onbekende parameter p. Laat zien dat de variantie van een zuivere schatter voor $(1-p)^2$ tenminste $4p(1-p)^3/n$ is.

3. Zij $X_1, \ldots, X_n$ een steekproef uit een Gammaverdeling met $\kappa = 3$ en onbekende parameter θ, d.w.z. uit een verdeling met dichtheid $\frac{1}{2\theta^3}\, x^2\, e^{-x/\theta}$ voor $x > 0$.

   (a) Bewijs dat de verdeling van $2\sum_{i=1}^n X_i/\theta$ een χ^2-verdeling heeft. Geef expliciet aan hoeveel vrijheidsgraden deze verdeling heeft.

   (b) Construeer een tweezijdig 90%-betrouwbaarheidsinterval voor θ.

4. Zij $X_1, \ldots, X_n$ een steekproef uit een Beta(θ,1)-verdeling. De dichtheid van een Beta(θ,1)-verdeling wordt gegeven door $\theta\, x^{\theta-1}$ voor $0 < x < 1$.

   (a) Geef een voldoende schatter voor θ, inclusief een argument waaruit de voldoendheid van de door U aangegeven schatter blijkt.

   (b) Toon aan dat de Maximum Likelihoodschatter voor θ gelijk is aan $-n/\sum_{i=1}^n \log X_i$.

   (c) Zij W de Maximum Likelihoodschatter voor $1/\theta$. Toon aan dat nW een Gammaverdeling volgt. Geef expliciet de parameters aan. U mag het antwoord van b) gebruiken.

   (d) Bepaal de asymptotische verdeling van de Maximum Likelihoodschatter voor $1/\theta$. U mag het antwoord van b) gebruiken.

5. Zij $X_1, \ldots, X_n$ een steekproef uit een Poissonverdeling met onbekende parameter λ. Leid een uniform meest onderscheidende toets (Uniform Most Powerful Test) af voor het toetsen van $H_0 : \lambda = 1$ tegen $H_a : \lambda > 1$.