Opgave 1 Het domino-probleem met aangewezen beginsteen, kortweg domino-probleem, vraagt of het mogelijk is het halfvlak m.b.v. een gegeven eindige verzameling T van domino-types te betegelen met de aangewezen steen op de onderste rij en gebruikelijke aansluitregels. Dit domino-probleem is onbeslisbaar.

a) Geef in een algemeen schema aan hoe het halt-probleem (halting problem) naar het domino-probleem gereduceerd kan worden. (10 ptn.)

b) Wat zijn voor de bedoelde reductie de domino-typen voor een Turing-machine (Σ, Q, δ, q_0)? (15 ptn.)

Opgave 2 Het subset sum problem SUBSET-SUM vraagt voor een multi-set van (natuurlijke) getallen $W = \{ w_1, \ldots, w_n \}$ en een getal t of er een deel-multiset $V = \{ v_1, \ldots, v_m \}$ van W is met $v_1 + \cdots + v_m = t$.

a) Beschrijf de tabel die hoort bij een instantie van 3SAT, $\bigwedge_{1 \leq i \leq k} (a_i \vee b_i \vee c_i)$ met variabelen $x_1, \ldots, x_\ell$ zeg. Wat is, in het bijzonder, de waarde van het getal t? (10 ptn.)

b) Bewijs dat 3SAT $\leq_P$ SUBSET-SUM. (15 ptn.)

Opgave 3 De stelling van Cook zegt dat SAT, vervulbaarheid van willekeurige propositionele formules, NP-volledig is.

a) Geef een beschrijving van het probleem 3SAT dat specifieke eisen aan de formules stelt. (10 ptn.)

b) De formules die corresponderen met een accepterend tableau in het bewijs van de stelling van Cook zijn de volgende:
   - $\varphi_{\text{cell}} = \bigwedge_{i \in I, j \in J} \Big[(\bigvee_{s \in S} x_{i,j,s}) \wedge (\bigwedge_{s,t \in S, s \neq t} (\overline{x_{i,j,s}} \vee \overline{x_{i,j,t}})) \Big]$
   - $\varphi_{\text{start}} = (\bigwedge_{-n^k \leq j \leq -1} x_{1,j,\#}) \wedge x_{1,o,q_0} \wedge (\bigwedge_{1 \leq j \leq n} x_{1,j,a_j}) \wedge (\bigwedge_{n_1 \leq j \leq n^k+1} x_{1,j,\#})$
   - $\varphi_{\text{move}} = \bigwedge_{i \in I', j \in J'} \bigvee_{W(\omega_1, \ldots, \omega_6)} \bigwedge_{0 \leq \ell \leq 2} (x_{i-1,j+\ell,\omega_\ell} \wedge x_{i,j+\ell,\omega_{3+\ell}})$
   - $\varphi_{\text{accept}} = \bigvee_{i \in I, j \in J} x_{i,j,q_{\text{yes}}}$

   Beargumenteer waarom 3SAT ook NP-volledig is. (15 ptn.)

Opgave 4 Een bipartiete graaf $G = (U, V, E)$ met kanten tussen U en V heeft een perfecte paring (perfect match) als er een deelverzameling kanten $M \subseteq E$ is zodanig dat elke knoop in U en V uiteinde is van een kant van M en dat de kanten van M niet overlappen. Stel $U = \{ u_1, \ldots, u_n \}$, $V = \{ v_1, \ldots, v_n \}$ zijn verzamelingen van grootte n.

a) Beargumenteer dat voor de incidentie-matrix of adjacency matrix $A = (\delta_{i,j})_{i,j=1}^n$, met $\delta_{i,j}$ is 1 als $(u_i, v_j) \in E$ en 0 anders, geldt: $\det(A) \neq 0 \iff G$ heeft een perfecte paring. (5 ptn.)

b) Geef een probabilistisch algoritme om te beslissen of een bipartiete graaf een perfecte paring heeft. (10 ptn.)

c) Toon aan dat er hoogstens 50% kans op een false negative is. (10 ptn.)

Hint: Maak gebuik van het feit dat een polynoom $F(y_1, \ldots, y_m)$ met elke y_i van graad hoogstens d maximaal mdM^{m-1} geheeltallige nulpunten heeft met $0 \leq y_i < M$, alle i.

Het eindcijfer is het aantal behaalde punten delen door 10.