Meetkunde

gerichte hoeken, driehoeksongelijkheid, Ravi, gerichte lengtes

Trainingsweekend, 16 februari 2008

Als je een meetkundig probleem aan het oplossen bent, stuit je vaak op verschillende oplossingen voor de verschillende configuraties. Zoveel verschil blijkt er echter niet in de bewijzen te zitten; hier en daar zie je in plaats van $\alpha = \beta$ staan dat $\alpha = 180° - \beta$, bijvoorbeeld als gelijke hoeken op een boog overgaan in overstaande hoeken van een koordenvierhoek of als gelijke hoeken op een rechte overgaan in de supplementaire hoeken (twee hoeken heten supplementair als hun som $180°$ is en complementair als hun som $90°$ is). Het grote voordeel nu van *gerichte* hoeken (deel 1) nu is dat zulke verschillen in ligging van punten hierdoor als sneeuw voor de zon verdwijnen; met één enkel bewijs behandel je in een keer allemaal verschillende gevallen.

In deel 2 gaan we nader in op de driehoeksongelijkheid en zullen we zien dat we met behulp van de Ravi-transformaties de lengtes van de zijden van een driehoek kunnen vervangen door een drietal getallen waar veel gemakkelijker mee te rekenen is.

Gerichte lengtes spelen o.a. een rol bij de stelling van Ceva en Menelaos en komen in deel 3 aan de orde.

1 Gerichte hoeken

Definitie: georiënteerde hoek Laat gegeven zijn twee punten A en B op een cirkel $\odot(O, r)$, dan definiëren we de *georiënteerde hoek* $\overrightarrow{\angle AOB}$ als het aantal graden dat je tegen de wijzers van de klok in moet lopen om van A naar B te komen. Dit geeft een getal tussen $0°$ en $360°$. We werken in eerste instantie modulo $360°$, dus bijv. $-30° = 330°$.
Een willekeurige hoek $\angle AOB$ kunnen we op voor de hand liggende wijze zien als een hoek $\angle A'OB'$ met A' en B' op een cirkel $\odot(O, r)$, en we definiëren $\overrightarrow{\angle AOB} = \overrightarrow{\angle A'OB'}$.

Eigenschap 1: $\overrightarrow{\angle BOA} = -\overrightarrow{\angle AOB}$.

Eigenschap 2: $\overrightarrow{\angle AOB} + \overrightarrow{\angle BOC} = \overrightarrow{\angle AOC}$.

Opmerking: Voor het gemak laten we ook hier het pijltje achterwege. We gebruiken dus de notatie $\angle AOB$ voor de georiënteerde hoek, terwijl $\angle AOB$ uiteraard ook naar de hoek zelf verwijst. In de praktijk wordt de notatie $\angle AOB$ bovendien vaak ook nog gebruikt in plaats van $|\angle AOB|$, maar dat doen we hier voor de duidelijkheid niet.

Voorbeeld 1: gestrekte hoek Stel A_2, O, A_1 liggen in deze volgorde op een lijn ($A_2 \prec O \prec A_1$), dan geldt $\angle A_1OB + \angle BOA_2 = \pm 180°$, dus $\angle A_2OB = 180° + \angle A_1OB$.

Voorbeeld 2: koordenvierhoek Stel A, P_1, C, P_2 liggen in deze volgorde op een cirkel, dan geldt $|\angle AP_1C| + |\angle AP_2C| = 180°$, dus $|\angle AP_2C| = 180° - |\angle AP_1C|$. Bovendien zijn de oriëntaties van beide hoeken verschillend, dus $\angle AP_2C = -(180° - \angle AP_1C) = 180° + \angle AP_1C$.

Voorbeeld 3: hoekensom driehoek Voor $\triangle ABC$ geldt $\angle ACB + \angle CBA + \angle BAC = \pm 180°$.

Voorbeeld 4: gelijkvormige driehoeken Voor gelijkvormige driehoeken $\triangle ABC$ en $\triangle A'B'C'$ geldt dat alle overeenkomstige hoeken of alledrie gelijk zijn, of alledrie tegengesteld:

$$\begin{pmatrix} \angle ACB \\ \angle CBA \\ \angle BAC \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} \angle A'C'B' \\ \angle C'B'A' \\ \angle B'A'C' \end{pmatrix}$$

Afhankelijk van het teken noemen we $\triangle ABC$ en $\triangle A'B'C'$ van dezelfde ($+$) of verschillende ($-$) oriëntatie.

Gezien de voorbeelden 1 en 2 lijkt het nuttig om modulo 180° te gaan werken in plaats van modulo 360°. We zullen zien dat bepaalde configuratieverschillen dan bij de berekeningen geen verschil meer uitmaken. Vanaf nu verlaten we dus al weer het concept van een georiënteerde hoek, en we voeren de volgende definitie in.

Definitie: gerichte hoek We definiëren de *gerichte hoek* $\overrightarrow{\angle AOB}$ (zelfde notatie als hierboven voor de tijdelijk ingevoerde georiënteerde grootte) als de georiënteerde hoek $\angle AOB$ modulo 180°.

In feite zien we nu hoeken tussen lijnstukken als hoeken tussen de bijbehorende lijnen: De gerichte hoek $\angle AOB$ is het minimaal aantal graden dat je tegen de wijzers van de klok in moet lopen om van de lijn OA naar de lijn OB te komen. Dit geeft een getal tussen 0° en 180°. Een typische waarde van de hoek tussen een lijn ℓ_1 en een lijn ℓ_2 is bijvoorbeeld $\angle(\ell_1, \ell_2) = -30°$, of wat daarmee overeenkomt: $\angle(\ell_1, \ell_2) = 150°$.

Door modulo 180° te rekenen, maakt het blijkbaar niet meer uit in welke volgorde punten op een lijn liggen, want met behulp van voorbeeld 1 zien we dat $\angle A_2OB = 180° + \angle A_1OB = \angle A_1OB$.

Ook maakt het niet meer uit hoe punten op een cirkel liggen. Als A, C, P_1 en P_2 op een cirkel liggen en als P_2 aan de andere kant van AC ligt t.o.v. P_1, zagen we dat $\angle AP_2C = 180^\circ + \angle AP_1C = \angle AP_1C$. En voor P_2 aan dezelfde kant geldt wegens gelijke-hoeken-op-gelijke-bogen ook $\angle AP_2C = \angle AP_1C$. Conclusie: het maakt niet meer uit of P_2 nou aan de ene of de andere kant van AC ligt; de gelijke-hoeken-op-gelijke-bogen-stelling en de koordenvierhoekstelling blijken nu samen te vallen!

Let op dat dit modulo 180° rekenen ook vreemde consequenties heeft: de hoekensom van een driehoek is dan 0. En uit $2\alpha = 2\beta$ volgt niet zonder meer $\alpha = \beta$; oplossen van $2\alpha = 2\beta + k \cdot 180^\circ$ geeft $\alpha = \beta + k \cdot 90^\circ$, dus $\alpha = \beta$ of $\alpha = \beta + 90^\circ$ (bedenk, nog steeds modulo 180°).

Opgave 1 *Formuleer zelf zoveel mogelijk bekende hoekenjaagstellingen in termen van gerichte hoeken. Bijvoorbeeld F-hoeken, Z-hoeken, hoek raaklijn-koorde, hoekensom driehoek. Denk steeds goed aan de richting van de hoeken.*

Opgave 2 *Zij $\triangle ABC$ een driehoek en laat P, Q, R punten zijn op de zijden BC, CA en AB. Bewijs dat de omgeschreven cirkels van $\triangle ARQ$, $\triangle BPR$ en $\triangle CQP$ door een gemeenschappelijk punt gaan.*

Opgave 3 ***(Lesbrief 6, opgave 2.4).***
Zij gegeven een koordenvierhoek $ABCD$, met AB niet evenwijdig met DC, en BC niet evenwijdig met AD. De zijden van $ABCD$ worden verlengd. We definiëren S als het snijpunt van AB en DC, en T als het snijpunt van BC en AD. Bewijs dat de binnenbissectrices van de hoeken S en T elkaar loodrecht snijden.

Opgave 4 *Cirkels Γ_1 en Γ_2 snijden elkaar in P en Q. Laat A een punt op Γ_1 zijn niet gelijk aan P of Q. De lijnen AP en AQ snijden Γ_2 nogmaals in respectievelijk B en C. Bewijs dat de hoogtelijn uit A in driehoek ABC door een punt gaat dat onafhankelijk is van de keuze van A.*

Opgave 5 *Gegeven is een cirkel Γ en een punt C buiten Γ. De raaklijnen door C aan Γ raken Γ in A en B. Op Γ ligt een punt P ongelijk aan A of B. De loodrechte projecties van P op respectievelijk AB, BC en CA heten Q, R en S.*
Bewijs dat

$$|PQ|^2 = |PR| \cdot |PS|.$$

Opgave 6 *Laat Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 vier cirkels in het vlak zijn. Stel dat Γ_1 en Γ_2 elkaar snijden in P_1 en Q_1, Γ_2 en Γ_3 elkaar snijden in P_2 en Q_2, Γ_3 en Γ_4 elkaar snijden in P_3 en Q_3 en Γ_4 en Γ_1 elkaar snijden in P_4 en Q_4. Bewijs dat P_1, P_2, P_3, P_4 op een lijn of cirkel liggen d.e.s.d.a. Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 op een lijn of cirkel liggen.*

2 Driehoeksongelijkheid en Ravi-transformaties

2.1 Driehoeksongelijkheid

Wegens ZZZ is er met gegeven lengtes der zijden $a > 0$, $b > 0$ en $c > 0$ hooguit één driehoek te maken (want kun je er nog een maken, dan is die ermee congruent). Maar niet voor elke a, b en c kunnen we een driehoek maken. Het is voldoende om te eisen dat de volgende zogenaamde *driehoeksongelijkheden* gelden:

$$a + b > c; \qquad b + c > a; \qquad c + a > b,$$

Omgekeerd gelden voor elke driehoek deze drie driehoeksongelijkheden. Beide beweringen worden bewezen in de volgende opgaven. Merk op: we kijken hier niet naar driehoeken die zijn ontaard in een lijnstuk (een driehoek waarvan de hoekpunten collineair zijn); dan zou een van de ongelijkheden overgaan in een gelijkheid.

Als c de grootste van de drie is ($c \geq a, b$), is het stelsel van drie driehoeksongelijkheden equivalent met $a + b > c$; de andere twee volgen hier nu immers uit: $b + c > c \geq a; c + a > c \geq b$.

Als we een drietal reële getallen hebben dat aan de driehoeksongelijkheden voldoet, moeten dit wel positieve getallen zijn. Immers $(a + b) + (b + c) > c + a$, dus $2b > 0$ en de andere zijdes gaan analoog.

Opgave 7 *Construeer met passer en liniaal, uitgaande van een lijnstuk met lengte 1, een driehoek met zijden 4, 5, 8.*

Opgave 8 *Ga na dat als $a + b > c \geq a, b$ er een driehoek te construeren is met zijden a, b, c.*

De lengte van een vector $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3)$ is de afstand van het punt $(0, 0, 0)$ tot het punt (x_1, x_2, x_3) in de 3-dimensionale ruimte. De vector $\overrightarrow{x}$ en de verschoven vector $\overrightarrow{y}$ (die van (x_1, x_2, x_3) naar $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$ loopt) kunnen we samen met de vector $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}$ beschouwen als de drie zijden van een driehoek $\triangle OXZ$, met $O = (0, 0, 0)$, $X = (x_1, x_2, x_3)$ en $Z = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$.

Opgave 9 *Leidt de volgende 3-dimensionale versie van de niet-strikte driehoeksongelijkheid af: Voor alle* $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^3$ *geldt* $|\overrightarrow{x}| + |\overrightarrow{y}| \geq |\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}|$. *Hint: maak gebruik van de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz.*

Opgave 10 *(Alternatief bewijs m.b.v. projectie.) Zij gegeven driehoek* ABC *(niet gedegenereerd) met zijden* $a = |BC|$, $b = |CA|$ *en* $c = |AB|$. *Beschouw de lijn* AB *als reële rechte, met* A *het punt* $0 \in \mathbb{R}$ *en met* B *het punt* $c \in \mathbb{R}$. *Noem* D *de loodrechte projectie van* C *op de lijn* AB *en noem* $x \in \mathbb{R}$ *het corresponderende reële getal. Bewijs nu* $a + b > c$. *Merk op: als* $\angle A$ *of* $\angle B$ *stomp is, ligt* D *buiten lijnstuk* AB *en geldt* $x < 0$ *of* $x > c$.

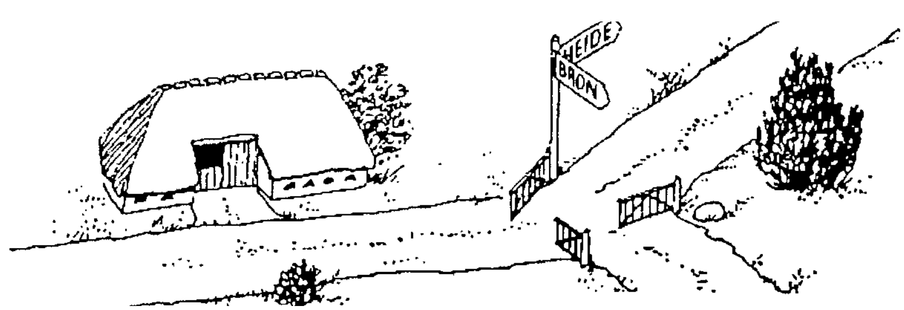
Opgave 11 *Voor welke reële waarden van* x *en* y *kun je een driehoek maken met zijden* $2x + y$, $x + 2y$ *en* $2x + 2y$?

In het dagelijks leven betekent de driehoeksongelijkheid dat de kortste verbinding tussen A en C het lijnstuk AC is; als je een knik maakt via B is je route langer.

Een drietal positieve reële getallen (a, b, c) waarvan we de elementen kunnen opvatten als de lengtes der zijden van een driehoek noemen we een drietal *driehoekszijden*.

Soms geldt een ongelijkheid alleen voor drietallen driehoekszijden. Die informatie moet je dus wel ergens gebruiken in je bewijs. In onderstaande paragraaf gaan we daar een hulpmiddel voor afleiden.

2.2 Ravi-transformaties



Opgave 12 *Op een driesprong ontmoeten drie wegen elkaar, van breedte a, b en c. Elke weg kan met twee scharnierende hekken worden afgesloten. Hoe groot moet elk van de drie hekken zijn, zodat elk tweetal hekken één weg kan afsluiten? (Bonus:) Los het probleem ook op voor een n-hoekig verkeersplein.*

Laat gegeven zijn de driehoekszijden $a > 0$, $b > 0$ en $c > 0$. We hebben net gezien dat het stelsel

$$y + z = a \qquad z + x = b \qquad x + y = c$$

een unieke oplossing heeft: Uit optellen volgt $2(x+y+z) = a+b+c$. Definieer $s = \frac{a+b+c}{2}$ als de halve omtrek, dan moet dus $x+y+z = s$, dus $x = s-(y+z) = s-a = \frac{a+b+c}{2}-a = \frac{-a+b+c}{2}$ en de driehoeksongelijkheid $b+c > a$ impliceert nou precies dat $x > 0$. Idem voor $y = s-b$ en $z = s-c$.

Omgekeerd, laat gegeven zijn $x, y, z > 0$ en definieer a, b en c als hierboven, dan kunnen we die opvatten als driehoekszijden. Inderdaad, bijv. $b+c = (z+x)+(x+y) = (y+z)+2x > y+z = a$; rest analoog. Dus dan wordt aan de driehoeksongelijkheden voldaan.

We hebben nu het complexe systeem voor een drietal (a, b, c) dat het moet voldoen aan de driehoeksongelijkheden vervangen door de equivalente eisen $x, y, z > 0$ na transformatie, en we hebben gezien dat $b + c > a$ daarbij equivalent is met $x > 0$.

Opgave 13 *Zij Γ een cirkel en A een punt buiten de cirkel. Bewijs dat de twee raaklijnstukken aan de cirkel even lang zijn.*

De lengtes x, y en z kunnen dus meetkundig gevonden worden door de ingeschreven cirkel in $\triangle ABC$ te construeren en de raaklijnstukken vanuit de hoekpunten te beschouwen.

Opgave 14 *Laat een driehoek met lengten der zijden a, b en c gegeven zijn. Bewijs dat*

$$(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c) \leq abc.$$

Opgave 15 *Laat een driehoek met lengten der zijden* a*,* b *en* c *gegeven zijn. Bewijs dat*

$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}\leq\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c},$$

met gelijkheid dan en slechts dan als $a=b=c$*.*

Opgave 16 *Laat een driehoek met lengten der zijden* a*,* b *en* c *gegeven zijn. Bewijs dat*

$$3(ab+bc+ca)\leq(a+b+c)^2\leq 4(ab+bc+ca).$$

Opgave 17 ***(Bonus)*** *Bewijs dat een vierhoek* $ABCD$ *een raaklijnenvierhoek is d.e.s.d.a.* $|AB|+|CD|=|BC|+|DA|$*.*

3 Gerichte lengtes

Definitie: gerichte lengte Gegeven is een lijn ℓ en een oriëntatie van ℓ (aangegeven door middel van een pijltje). Voor twee punten A en B op de lijn definiëren we nu de *gerichte lengte* $\overrightarrow{AB}$ van het lijnstuk AB als

$$\overrightarrow{AB} = \begin{cases} +|AB| & \text{als } A \prec B \\ -|AB| & \text{als } B \prec A \end{cases}$$

waarbij $A \prec B$ betekent: als je van A naar B loopt, dan beweeg je je in de richting van het bij ℓ gegeven pijltje.

NB: Deze notatie wordt ook gebruikt voor vectoren, maar we gebruiken hem hier dus anders.

Opmerking: Zien we ℓ als getallenlijn (de reële rechte) en het pijltje als indicatie van de positieve richting, dan zijn punten op ℓ precies de reële getallen op deze rechte. Er geldt $A \prec B$ precies dan als $A < B$, en $\overrightarrow{AB}$ is niets anders dan het verschil $B - A$.

Eigenschap 1: $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Eigenschap 2: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Opmerking: Voor het gemak laten we het pijltje vanaf nu weg en gebruiken we de notatie AB voor de gerichte lengte van lijnstuk AB. Daarmee kan AB dus minstens twee dingen beteken: het lijnstuk met de eindpunten A en B of z'n gerichte lengte. In de praktijk wordt de notatie AB bovendien vaak ook nog gebruikt voor de (absolute) lengte $|AB|$ van lijnstuk AB, maar dat doen we hier voor de duidelijkheid niet. Wel wordt AB nog gebruikt voor de halfrechte met eindpunt A door B en voor de lijn door A en B; het is dus wel zo duidelijk om altijd te vermelden of je het over het lijnstuk AB, de halfrechte AB of de lijn AB hebt.

Lemma 1 *Laat $A, B, X, Y \in \ell$ gegeven zijn. Stel $\frac{AX}{BX} = \frac{AY}{BY}$. Dan volgt $X = Y$.*

Bewijs: Tel aan beide kanten -1 op, dan krijgen we $\frac{AX}{BX} + \frac{XB}{BX} = \frac{AY}{BY} + \frac{YB}{BY}$, dus wegens de opteleigenschap $\frac{AB}{BX} = \frac{AB}{BY}$. Hieruit volgt dat $BX = BY$, dus $X = Y$. $\square$

Lemma 2 *Laat $A, B, P \in \ell$ gegeven zijn. Er geldt $PA \cdot PB$ is negatief dan en slechts dan als P tussen A en B ligt. Verder $PA \cdot PB$ is positief dan en slechts dan als P buiten het lijnstuk AB ligt.*

Bewijs: Stel $PA \cdot PB$ is negatief. Beide factoren zijn dus ongelijk 0. Als PA negatief, dan is PB positief, en volgt $A \prec P \prec B$. Als PA juist positief, dan is PB negatief, en volgt $B \prec P \prec A$. In beide gevallen ligt P tussen A en B. Omgekeerd volgt uit ligging van P tussen A en B direct dat PA en PB verschillend teken hebben.
Stel $PA \cdot PB$ is positief. Beide factoren zijn dus ongelijk 0. Als PA negatief, dan is PB negatief, en volgt $A \prec P$ en $B \prec P$. Als PA juist positief, dan is PB positief, en volgt $P \prec A$ en $P \prec B$. In beide gevallen ligt P buiten lijnstuk AB. Omgekeerd volgt uit ligging van P buiten lijnstuk AB direct dat PA en PB hetzelfde teken hebben. □

Voorbeeld: De macht van een punt P t.o.v. een cirkel Γ is gedefinieerd als $\mu_\Gamma(P) = PA \cdot PB$ waarbij A en B de snijpunten zijn van een lijn ℓ door P met Γ. (Volgens de machtstelling is deze definitie eenduidig.) De macht is positief voor P buiten Γ en negatief voor P binnen Γ.

Merk op dat in bovenstaande lemma's de werkelijke oriëntatie van lijn ℓ niet van belang blijkt. Verandering van oriëntatie van lijn ℓ heeft immers twee extra min-tekens tot gevolg, die tegen elkaar wegvallen. Dit is een essentiële en zeer belangrijke observatie: zolang we alleen producten of quotiënten of gelijkheden van gerichte lengtes op dezelfde lijn tegenkomen, hoeven we de optredende lijnen niet daadwerkelijk een oriëntatie te geven. Toepassingen hiervan hebben we ook gezien bij de stelling van Ceva en Menelaos.

Stelling van Ceva Zij $\triangle ABC$ gegeven en laat P, Q en R punten zijn op respectievelijk de lijnen AB, BC en CA. De hoektransversalen AQ, BR en CP zijn concurrent d.e.s.d.a.

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = 1 \qquad \text{of equivalent:} \qquad \frac{AP}{BP} \cdot \frac{BQ}{CQ} \cdot \frac{CR}{AR} = -1$$

Stelling van Menelaos Zij $\triangle ABC$ gegeven en laat P, Q en R punten zijn op respectievelijk de lijnen AB, BC en CA. De punten P, Q en R zijn collineair d.e.s.d.a.

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = -1 \qquad \text{of equivalent:} \qquad \frac{AP}{BP} \cdot \frac{BQ}{CQ} \cdot \frac{CR}{AR} = 1$$

Gebruikstip: Als je redeneert vanuit ongerichte gegevens (bijv. twee congruente driehoeken), leidt dan eerst af wat de absolute lengte is, en beredeneer daarna pas wat het teken moet zijn.

Voorbeeld hoe het mis zou kunnen gaan: Beschouw een rechthoekige driehoek $\triangle ABC$ met $\angle B$ recht en met D het voetpunt van de loodlijn op AC vanuit B. Dan zijn $\triangle ABC$, $\triangle ADB$ en $\triangle BDC$ gelijkvormig. Uit $\triangle ADB \sim \triangle BDC$ volgt $\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|BD|}{|DC|}$, dus $|AD| \cdot |DC| = |BD| \cdot |DB|$. Hadden we dit gericht geprobeerd, dan hadden we uit $\frac{AD}{DB} = \frac{BD}{DC}$

geconcludeerd dat $AD \cdot DC = BD \cdot DB$. Toch is het linkerlid positief (AD en DC lopen in dezelfde richting) en het rechterlid juist negatief.

Voorbeeld hoe het mis zou kunnen gaan: Stel $\triangle ABC$ is gelijkbenig: $|AB| = |BC|$. Hieruit volgt $\triangle ABC \cong \triangle CBA$ (wegens ZHZ). Bijgevolg $\frac{|AC|}{|CA|} = \frac{|AB|}{|CB|} = \frac{|BC|}{|BA|} = 1$, en toch mogen we niet zomaar hieruit concluderen dat $\frac{AC}{CA} = 1$; we weten zelfs dat $\frac{AC}{CA} = -1$.

Opgave 18 *Bewijs dat de zwaartelijnen van een driehoek door 1 punt gaan.*

Opgave 19 *Bewijs dat de hoogtelijnen van een driehoek door 1 punt gaan.*

Opgave 20 *Zij gegeven driehoek ABC. Zijn ingeschreven cirkel raakt AB in P, BC in Q en CA in R. Bewijs dat AQ, BR en CP door 1 punt gaan (het zogenaamde punt van Gergonne).*

Opgave 21 *Definieer de* gerichte verhouding (ABP) *als volgt:*

$$(ABP) = \frac{AP}{BP}.$$

Druk (APB), (BAP), (BPA), (PAB), (PBA) uit in $\delta = (ABP)$.

4 Extra: Gerichte afstanden punt–lijn

Definitie: gerichte afstand Een lijn ℓ verdeelt het vlak V in twee delen als we ℓ eruit weglaten; noem ze V_ℓ^+ en V_ℓ^-. Voor een punt P in het vlak definiëren we nu de gerichte afstand $d(P,\ell)$ tot lijn ℓ als

$$d(P,\ell) = \begin{cases} +|d(P,\ell)| & \text{als } P \in V_\ell^+ \\ -|d(P,\ell)| & \text{als } P \in V_\ell^- \end{cases}$$

Voorbeeld: Noem (het verlengde van) de zijden van $\triangle ABC$ achtereenvolgens $a = BC$, $b = CA$ en $c = AB$. Voor $\ell \in \{a,b,c\}$ definiëren we V_ℓ^+ als dat gedeelte van $V \backslash \ell$ waarin $\triangle ABC$ ligt. Met deze notatie vinden we dan het volgende. De binnenbissectrice van $\angle CAB$ is $\{P \mid \frac{d(P,b)}{d(P,c)} = 1\}$ (namelijk $\frac{+\gamma}{+\gamma}$ of $\frac{-\gamma}{-\gamma}$). De buitenbissectrice van $\angle CAB$ is $\{P \mid \frac{d(P,b)}{d(P,c)} = -1\}$ (namelijk $\frac{-\gamma}{+\gamma}$ of $\frac{+\gamma}{-\gamma}$). Net zo is de buitenbissectrice van $\angle ABC$ gelijk aan $\{P \mid \frac{d(P,c)}{d(P,a)} = -1\}$. Als P het snijpunt van beide buitenbissectrices is, gelden beide relaties, dus $\frac{d(P,b)}{d(P,c)} = -1$ en $\frac{d(P,c)}{d(P,a)} = -1$. Daaruit volgt $\frac{d(P,b)}{d(P,c)} \cdot \frac{d(P,c)}{d(P,a)} = -1 \cdot -1$, dus $\frac{d(P,b)}{d(P,a)} = 1$. We concluderen dat P op de *binnen*bissectrice van $\angle BCA$ ligt.

Opgave 22 *Zij gegeven een lijn ℓ en twee punten A, B niet op ℓ. De loodrechte projecties van A en B op ℓ noemen we A' respectievelijk B'. Veronderstel $A' \neq B'$. Zij P het snijpunt van de lijn AB met ℓ. Bewijs dat*

$$(A'B'P) \left(= \frac{A'P}{B'P} \right) = \frac{d(A,\ell)}{d(B,\ell)}$$