Invariantie Groep 1

Trainingsweekend, 24 januari 2009

Het principe van invariantie kun je gebruiken bij opgaven waar je gegeven hebt

- een beginsituatie,
- een eindsituatie,
- een of meer toegestane stappen.

De vraag is dan vaak: kun je vanuit de beginsituatie de eindsituatie bereiken door alleen toegestane stappen te doen? Als je vermoedt dat dit niet mogelijk is, kun je dit proberen te bewijzen met behulp van invariantie. Hierbij zoek je een waarde die bij het doen van een toegestane stap niet verandert, een zogeheten *invariant*. Als deze waarde in de begin- en eindsituatie niet hetzelfde is, dan is het onmogelijk om vanuit de beginsituatie de eindsituatie te bereiken.

Voorbeeldopgave
Beginnend met een rij van vijf enen en zes nullen mag je telkens twee getallen wegstrepen en er één voor in de plaats zetten. Als je twee dezelfde getallen wegstreept, zet je een nul ervoor terug. Als je twee verschillende getallen wegstreept, zet je een één ervoor terug. Eindig je altijd met hetzelfde getal?

Uitwerking
Definieer S als de som van de getallen in de rij. Wat gebeurt er nu met S als je twee cijfers wegstreept?

- Als je twee enen wegstreept, dan komt er een nul voor in de plaats en wordt S dus twee kleiner.
- Als je twee nullen wegstreept, dan komt er een nul voor in de plaats en blijft S gelijk.
- Als je een één en een nul wegstreept, dan komt er een één voor in de plaats en blijft S gelijk.

We concluderen dat bij de toegestane stappen S niet verandert modulo 2. In de beginsituatie is $S = 5$. In de eindsituatie staat er nog precies één getal op het bord. Dit getal moet dus oneven zijn, omdat S oneven moet zijn. Dus dit getal kan alleen een één zijn. $\square$

Opgave 1 *In de AO-AO-taal worden alle woorden met alleen A's en O's geschreven. Twee woorden betekenen hetzelfde als je de een in de ander over kan laten gaan door ergens AO weg te halen of tussen te voegen. Betekenen de woorden AOAOOA en AAOAOA hetzelfde?*

Opgave 2 *Een cirkel is verdeeld in zes sectoren. In elke sector staat een pion. Per zet mogen we twee willekeurige pionnen verplaatsen naar een buursector. Kunnen we alle pionnen in één sector krijgen?*

Opgave 3 *In een rij van tien bomen zit in elke boom een spreeuw. Op het moment dat een spreeuw een willekeurig aantal k bomen naar rechts vliegt, vliegt een andere spreeuw k bomen naar links. Kunnen alle spreeuwen uiteindelijk in één boom komen? Wat als er elf bomen zijn?*

Opgave 4 *Op een 8×8-schaakbord zijn alle vakjes wit gekleurd op één zwart vakje na. Je mag elke rij en elke kolom herkleuren, d.w.z. elk vakje in zo'n rij of kolom wordt wit als het zwart was en zwart als het wit was. Kun je alle vakjes wit krijgen?*

Opgave 5 *We schrijven het getal 8^{2009} op en berekenen de som van de cijfers. Dat herhalen we totdat we een getal van slechts één cijfer over hebben. Welk getal houden we over?*

Opgave 6 *In de landen Dillia en Dallia gebruikt met voor de munteenheid respectievelijk dillers en dallers. In Dillia is de wisselkoers 10 dillers voor 1 daller. In Dallia is de wisselkoers 10 dallers voor 1 diller. Een handelaar begint met 1 diller en mag vrij reizen tussen de landen. Laat zien dat als de handelaar geen geld uitgeeft, hij nooit evenveel dillers als dallers kan krijgen.*

Opgave 7 *We hebben drie machines waar we kaarten in kunnen invoeren. Alle ingevoerde kaarten krijgen we weer terug. Als we in de eerste machine een kaart met de getallen a en b invoeren, krijgen we een kaart met de getallen $a+1$ en $b+1$. Als we in de tweede machine een kaart met de even getallen a en b invoeren, krijgen we een kaart met de getallen $\frac{a}{2}$ en $\frac{b}{2}$. Als we in de derde machine een kaart met de getallen a en b en een kaart met de getallen b en c invoeren, krijgen we een kaart met de getallen a en c. We beginnen met een kaart met daarop de getallen 5 en 19. Kunnen we een kaart krijgen met de getallen 1 en 2009?*

Opgave 8 *De getallen 1, 2, ..., 20 staan op een krijtbord. We mogen twee willekeurige getallen a en b vervangen door het getal $a + b - 1$. Welk getal blijft er over nadat je dit 19 keer gedaan hebt?*

Opgave 9 *De getallen 1, 2, ..., 20 staan op een krijtbord. We mogen twee willekeurige getallen a en b vervangen door het getal $ab + a + b$. Welk getal blijft er over nadat je dit 19 keer gedaan hebt?*

Opgave 10 *Op een eiland wonen 13 grijze, 15 bruine en 17 rode kameleons. Als twee kameleons met verschillende kleuren elkaar tegenkomen, veranderen ze hun kleur in de derde kleur. Kunnen op een gegeven moment alle kameleons dezelfde kleur hebben?*

Opgave 11 *Gegeven is een drietal getallen. Nu mag je er steeds twee uitkiezen, zeg a en b, en deze vervangen door $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ en $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$. Kun je het drietal $(1, \sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$ in een aantal stappen vervangen door het drietal $(2, \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$?*

Opgave 12 *Op tafel ligt een stapel met 1001 stenen. Je mag per zet een stapel uitkiezen waar meer dan twee stenen in zitten, hiervan één steen weggooien en de overige stenen verdelen over twee stapels (met in elke stapel minstens één steen). Kun je eindigen met alleen maar stapels van 3 stenen?*

Opgave 13 *Een kikker op veld (a, b) mag springen naar veld $(a, 2b)$, veld $(2a, b)$, veld $(a, b-a)$ als $b > a$ en veld $(a-b, b)$ als $a > b$. De kikker begint op veld $(1, 1)$. Op welke van de velden $(24, 60)$, $(40, 60)$, $(200, 4)$ en $(2412, 2007)$ kan de kikker na een aantal sprongen terecht komen?*

Opgave 14 *Van een $n \times n$-bord is een aantal vakjes ziek. Deze ziekte is erg besmettelijk. Als een vakje minstens twee zijden gemeen heeft met zieke vakjes, dan wordt dat vakje zelf ook ziek. Aan het eind van de epidemie blijkt elk vakje van het bord ziek te zijn. Hoeveel vakjes waren er aan het begin minstens ziek?*