Tentamen Wiskunde 2 (2DD50)
Dinsdag – 28 januari 2014, 09:00–12:00

Het tentamen bestaat uit 5 opgaven. De eerste drie opgaven gaan over het SOR-deel van het vak. De laatste twee opgaven gaan over het Optimaliseringsdeel van het vak. Geef bij alle opgaven een duidelijke motivatie van uw antwoorden.

Voor de opgaven kunnen de volgende aantallen punten worden behaald:

Opgave 1. 15 punten
Opgave 2. 15 punten
Opgave 3. 10 punten
Opgave 4. 15 punten
Opgave 5. 15 punten

Het tentamencijfer wordt bepaald door het totaal der behaalde punten door 7 te delen.

De opgaven over het SOR-deel en de opgaven over het Optimaliseringsdeel moeten op verschillende vellen gemaakt worden!!

—— *** ——

Opgave 1. Een bedrijf beschikt over junior-operators, operators en senior-operators. De streefbezetting is 300 personen gelijk verdeeld over de drie categorieën. Van de junior-operators stroomt per maand gemiddeld 5% door naar de categorie operators en verlaat gemiddeld 2% het bedrijf. In de categorie operators stroomt per maand gemiddeld 4% door naar de categorie senior-operators en verlaat gemiddeld 1% het bedrijf. In de categorie senior-operators verlaat gemiddeld 5% per maand het bedrijf. Voor alle drie categorieën geldt dat alle overige werknemers gewoon in de categorie blijven waarin ze de vorige maand al zaten. Er kan gerecruteerd worden voor alle drie categorieën.

(a) [3 punten] Stel een Markov model op voor het doorstroomgedrag van een werknemer. Geef toestandsruimte en overgangsmatrix.

(b) [4 punten] Wat is de kans dat een nieuwe junior-operator uiteindelijk het bedrijf zal verlaten vanuit de categorie junior-operator, de categorie operator respectievelijk de categorie senior-operator?

(c) [4 punten] Men wil voor elk van de categorieën een vast aantal nieuwe medewerkers per maand werven. Hoe groot moeten deze aantallen zijn om op de lange duur een verwachte bezetting te halen van 300 personen gelijk verdeeld over de drie categorieën?

(d) [4 punten] Een junior-operator kost 2.000 euro per maand, een operator 2.500 euro en een senior-operator 3.000 euro. Hoeveel kost iemand die als junior-operator, operator respectievelijk senior-operator geworven is naar verwachting in totaal totdat hij het bedrijf heeft verlaten?

—— *** ——

Opgave 2. In een werkplaats worden jobs bewerkt op twee identieke, parallelle machines. Jobs arriveren bij de machines volgens een Poisson proces met een intensiteit van 4 jobs per uur. De bewerkingstijden van jobs zijn exponentiëel verdeeld met een gemiddelde van 20 minuten. De afhandeling van een job levert een opbrengst van 200 euro op. Voor een machine die een job bewerkt zijn de machinekosten 120 euro per machine per uur. Voor een machine die geen job bewerkt zijn de machinekosten 30 euro per machine per uur. De materiaalkosten bedragen 25 euro per job, de overige vaste kosten bedragen 300 euro per uur.

(a) [4 punten] Het aantal jobs in het systeem is een continue-tijd Markov keten. Geef het intensiteitendiagram van de Markov keten en laat zien dat de limietkansen p_n op n jobs in het systeem gegeven worden door

$$p_0 = \frac{1}{5}, \quad p_n = \left(\frac{4}{15}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \quad \text{voor } n \geq 1.$$

(b) [3 punten] Bereken de lange-termijn verwachte winst (= opbrengst - kosten) per uur.

(c) [4 punten] Bereken de verwachte tijd dat een job in het systeem is.

Door de kwaliteit van het afgeleverde werk groeit het gemiddeld aantal nieuwe jobs dat per uur bij de werkplaats aankomt van 4 naar 6 per uur. De chef van de werkplaats wil nu niet meer dan 6 jobs tegelijk in de werkplaats hebben; nieuwe jobs die aankomen als dit aantal bereikt is, worden geweigerd en gaan verloren.

(d) [4 punten] Bereken de verwachte tijd dat een job die niet verloren gaat in het systeem is in deze nieuwe situatie.

—— *** ——

Opgave 3. Bij een machine arriveren volgens een Poisson proces λ jobs per uur. De kansdichtheid van de produktietijd (in minuten) van een job wordt gegeven door

$$f(u) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{als } 2 < u < 4, \\ \frac{1}{2}, & \text{als } 4 < u < 5, \\ 0, & \text{anders.} \end{cases}$$

(a) [4 punten] Voor welke waarden van λ geldt dat het systeem stabiel is?

In het vervolg nemen we aan dat $\lambda = 12$.

(b) [6 punten] Bereken de bezettingsgraad van de machine, de verwachte resterende produktietijd van de job bij de machine en het verwachte aantal jobs in het systeem.

—— *** ——

Opgave 4. Een kandidaat voor de gemeenteraad plant zijn campagne voor de komende verkiezingen. Hij wordt gesteund door zes vrijwilligers, die hij zo efficient mogelijk wil inzetten in drie districten. Hij voelt aan dat het niet goed is een medewerker aan meer dan een district toe te wijzen. Het is wel toegestaan geen enkele medewerker aan een district toe te wijzen als zij daardoor elders meer kunnen bereiken. De volgende tabel geeft de verwachte toename aan stemmen per district (in honderdtallen) voor de kandidaat bij inzet van het corresponderend aantal vrijwilligers.

Aantal	Districten		
medewerkers	1	2	3
0	0	0	0
1	7	4	5
2	11	6	9
3	16	8	10
4	18	14	11
5	20	14	12
6	21	15	18

Gebruik een dynamisch programma om te beslissen hoe de zes medewerkers over de districten moeten worden verdeeld om de totale verwachte groei van de stemmen voor de kandidaat te maximaliseren.

(a) [3 punten] Wat zijn de stappen (stages) in je dynamisch programma? Wat zijn de mogelijke toestanden (states)? En wat zijn de keuzemogelijkheden (choices)?

(b) [4 punten] Beschrijf de onderliggende recursieve betrekking van je dynamisch programma, en geef daarvan een rechtvaardiging.

(c) [6 punten] Los het probleem op met je dynamisch programma. Geef alle tussenresultaten in tabellen weer.

(d) [2 punten] Geef de optimale oplossingswaarde (in honderdtallen stemmen) en geef ook de oplossing zelf weer.

—— *** ——

Opgave 5. Beschouw het volgende transportprobleem met drie producenten en vier consumenten:

4	4	8	1	6
9	5	5	5	8
1	8	8	8	3
5	5	4	3	

(a) [2 punten] Herschrijf het transportprobleem als een Lineair Programma (Benoem de objectfunctie en alle beperkingen.)

(b) [3 punten] Bereken een toegelaten (start) oplossing voor het transportprobleem, hetzij door toepassing van deel 1 van de twee-fasen methode, hetzij door de Noord-West-hoek regel te gebruiken.

(c) [6 punten] Bereken een optimale oplossing voor het transportprobleem, hetzij door het tweede deel van de twee-fasen methode toe te passen, hetzij door gebruik te maken van het Transportation Simplex algoritme. Start vanuit de oplossing gevonden in (b) en geef alle tussenstappen weer.

(d) [2 punten] Formuleer het duale LP voor het LP gevonden in (a).

(e) [2 punten] Geef een optimale oplossing en oplossingswaarde voor het duale probleem.