Organisatorische informatie

Wat	Dag	Tijd	Zaal	Docent
College	Tue	5+6	Aud 6+15	Gerhard Woeginger
	Thu	1+2	Aud 1+4	Gerhard Woeginger
Clicker session	Tue	7+8	Aud 6+15	Gerhard Woeginger
Instructions	Thu	3+4	Aud 10	Cor Hurkens
			Pav b2	Rudi Pendavingh
			Pav m23	Aleksandar Markovic
			Ipo 0.98	Murat Firat

Tussentoets: 26 november en 15 december
Tentamen: end of January / beginning of February

2DD50: Wiskunde 2 (2)

Inhoudelijk overzicht

Wiskunde 2 (2DD50) bouwt voort op Calculus (2WBB0) en Wiskunde 1 (2DD40)

Literatuur:
F.S. Hillier, G.J. Lieberman, *Introduction to Operations Research*, McGraw Hill, New York, **10e editie**

Voor actuele informatie, college materiaal, slides, instructie opgaven:

www.win.tue.nl/~gwoegi/2DD50/OPT/

Programma voor vandaag

- In woorden geformuleerd optimaliseringsprobleem vertalen naar wiskundig probleem
- Lineair Programmeringsprobleem (LP probleem)
- Toegelaten oplossingen, optimale oplossing, optimale waarde
- Standaard LP probleem
- Herschrijven willekeurig LP probleem naar standaard LP probleem
- Grafische methode voor oplossen van 'kleine' LP problemen
- Simplex methode voor oplossen van LP problemen met twee of meer beslissingsvariabelen
    - Vandaag voor 'eenvoudige' LP problemen
    - Volgende keer voor willekeurige LP problemen

Casus 1: Wynder Glass Corporation (1)

Produceert aluminium kozijnen en houten ramen; drie fabrieken:

- fabriek 1: aluminium kozijnen
- fabriek 2: houten ramen
- fabriek 3: glas en verricht assemblage

Benodigde productietijd:

- 1 uur in fabriek 1 voor 1 lading aluminium kozijnen
- 2 uur in fabriek 2 voor 1 lading houten ramen
- 3 u in fabriek 3 voor lading kozijnen; 2 u voor lading ramen

Slechts beperkte productietijd beschikbaar:

- fabriek 1: 4 uur per week
- fabriek 2: 12 uur per week
- fabriek 3: 18 uur per week

Winst per product:

- 3000 Euro per lading aluminium kozijnen
- 5000 Euro per lading houten ramen

Casus 1 (2)

Doel: totale winst maximaliseren

Introduceer **beslissingsvariabelen**:

- x_1: aantal ladingen aluminium kozijnen per week
- x_2: aantal ladingen houten ramen per week

Totale winst bedraagt: $3000x_1 + 5000x_2$ (**Doelfunctie**)

Beperkingen:

- Fabriek 1 draait $\leq$ 4 uur/week; 1 lading kozijnen vergt 1 uur
  $\Rightarrow \quad x_1 \leq 4$
- Fabriek 2 draait $\leq$ 12 uur/week; 1 lading ramen vergt 2 uur
  $\Rightarrow \quad 2x_2 \leq 12$
- Fabriek 3 draait $\leq$ 18 uur/week; 1 lading kozijnen vergt 3 uur, 1 lading ramen vergt 2 uur
  $\Rightarrow \quad 3x_1 + 2x_2 \leq 18$

Verder: $x_1 \geq 0 \quad$ en $\quad x_2 \geq 0$

Casus 1 (3)

Wiskundig model:

$$
\begin{array}{lrrl}
\text{maximaliseer } Z = & 3000x_1 & +5000x_2 & \\
\text{onder voorwaarden} & x_1 & & \leq 4 \\
 & & 2x_2 & \leq 12 \\
 & 3x_1 & + \quad 2x_2 & \leq 18 \\
 & x_1, & x_2 & \geq 0
\end{array}
$$

Wat is de optimale oplossing?

Casus 1 (3)

Wiskundig model:

$$
\begin{array}{lrcrl}
\text{maximaliseer } Z = & 3000x_1 & +5000x_2 & & \\
\text{onder voorwaarden} & x_1 & & & \leq 4 \\
 & & & 2x_2 & \leq 12 \\
 & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq 18 \\
 & x_1, & & x_2 & \geq 0
\end{array}
$$

Wat is optimale oplossing? $x_2^* = 6$, $x_1^* = 2$

Bovenstaand voorbeeld is speciaal geval van Lineair Programmeringsprobleem (LP probleem)

Om algemeen LP probleem te formuleren, is het handig om lineaire algebra notatie te gebruiken

Intermezzo: lineaire algebra notatie

$$c^T x = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [c_1 \quad \cdots \quad c_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n$$

inprodukt

$Ax = b$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{array}$$

lineair stelsel, stelsel lineaire vergelijkingen

Ax: maxtrix-vector produkt

Algemeen LP probleem

$$\min/\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad \text{doelfunctie}$$

$$\text{onder voorwaarden} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{bmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{bmatrix} b_i \quad \text{voor } i = 1, \ldots, m$$

functionele restricties

$$x_i \geq 0 \quad \text{voor sommige variabelen}$$

niet-negativiteitsrestricties

c_j: doelstellingscoefficienten (of kostencoefficienten)
b_i: rechterzijde constanten
a_{ij}: linkerzijde constanten

Algemeen LP probleem

Moet voldoen aan:

- Beslissingsvariabelen zijn reële getallen ($\in \mathbb{R}$)
  Restrictie x_j geheeltalling ($\in \mathbb{Z}$) is NIET toegestaan
- Doelfunctie is lineair
- Functionele restricties zijn lineair
- Doelstellingscoefficienten, rechterzijde en linkerzijde zijn constant

Functie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is lineair als $f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y)$ voor alle $\alpha \in \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}^n$

Lineaire functie is altijd van de vorm:
$f(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j$, waar a_j constanten zijn
of $f(x) = a^T x$, waar $a = [a_1, \ldots, a_n]^T$ en $x = [x_1, \ldots, x_n]^T$

Voorbeelden van problemen die NIET LP zijn

$$
\begin{array}{lcccc}
\text{maximaliseer } Z & = & x_1 & +x_2 & & \\
\text{onder voorwaarden} & & x_1^2 & +x_2^2 & \leq & 5
\end{array}
$$

Functionele restrictie is NIET lineair

$$
\begin{array}{lccccc}
\text{maximaliseer } Z & = & x_1^3 & +\log(x_2) & & \\
\text{onder voorwaarden} & & x_1 & +x_2 & = & 5 \\
 & & x_1, & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Doelfunctie is NIET linear

Voorbeelden van problemen die NIET LP zijn

$$
\begin{array}{lrrrcl}
\text{maximaliseer } Z & = & 3000x_1 & +5000x_2 & & \\
\text{onder voorwaarden} & & x_1 & & \leq & 4 \\
 & & & 2x_2 & \leq & 12 \\
 & & 3x_1 & +2x_2 & \leq & 18 \\
 & & x_1 \in \mathbb{Z} & & & \\
 & & x_1, & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Restrictie $x_1 \in \mathbb{Z}$ NIET toegestaan

$$
\begin{array}{lrrrcl}
\text{maximaliseer } Z & = 1000+ & 3000x_1 & +5000x_2 & & \\
\text{onder voorwaarden} & & x_1 & & \leq & 4 \\
 & & & 2x_2 & \leq & 12 \\
 & & 3x_1 & +2x_2 & \leq & 18 \\
 & & x_1, & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Doelfunctie is NIET linear

Terminologie

- Toegelaten oplossing: waarden voor beslissingsvariabelen $x_1, \ldots, x_n$ zodat aan alle restricties wordt voldaan
- Niet-toegelaten oplossing: waarden voor $x_1, \ldots, x_n$ zodat aan minstens één restrictie NIET wordt voldaan
- Toegelaten gebied: verzameling van alle toegelaten oplossingen
- Optimale oplossing: toegelaten oplossing waarvoor doelfunctie optimaal is (minimaal of maximaal, wat van toepassing is)
  NB: Er kunnen meerdere optimale oplossingen zijn!
  NB: Geen enkele optimale oplossing als toegelaten gebied leeg is
- Optimale waarde: waarde die doelfunctie dan heeft
  NB: Er is altijd hoogstens één optimale waarde!
  (mogelijk oneindig voor onbegrensd toegelaten gebied)
  NB: Optimale waarde bestaat niet als toegelaten gebied leeg is

Standaard LP probleem

Algemeen LP probleem laat nog behoorlijke verscheidenheid toe,
die echter niet tot significant verschil aanleiding geeft;
het is handig om standaard vorm af te spreken

- Doelstelling is maximaliseren
- Alle functionele restricties zijn gelijkheden
- Alle beslissingsvariabelen hebben niet-negativiteitsrestrictie

$$
\begin{array}{ll}
\max Z = & c^T x \\
\text{onder voorwaarden} & Ax = b \\
& x_1, \ldots, x_n \geq 0
\end{array}
$$

Herschrijven willekeurig LP naar standaard probleem

(1) Als doelfunctie $\min Z = c^T x$

dan omzetten naar $\max -Z = -c^T x$

(2) Als functionele restrictie $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$

dan omzetten naar $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + s_i = b_i$

met slack variabele $s_i \geq 0$

(3) Als functionele restrictie $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i$

dan omzetten naar $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - s_i = b_i$

met surplus variabele $s_i \geq 0$

(4) Als wel-negativiteitsrestrictie $x_i \leq 0$

dan omzetten naar $y_i \geq 0$

met $y_i = -x_i$ (vervang x_i door $-y_i$ in model)

(5) Als x_i vrij (niet $x_i \geq 0$ of $x_i \leq 0$)

dan omzetten naar $x_i = x_i' - x_i''$, $x_i, \; x_i'' \geq 0$

Willekeurig LP $\Rightarrow$ standaard probleem: voorbeeld 1

$$
\begin{array}{llllll}
\max Z = & 2x_1 & +4x_2 & +3x_3 & & \\
\text{onder voorwaarden} & x_1 & +3x_2 & +2x_3 & \leq & 30 \\
 & x_1 & + \ x_2 & + \ x_3 & \leq & 24 \\
 & 3x_1 & +5x_2 & +3x_3 & \leq & 60 \\
 & & x_2, & x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

wordt

$$
\begin{array}{lllllllll}
\max Z = & 2x_1' & -2x_1'' & +4x_2 & +3x_3 & & & & \\
\text{onder voorwaarden} & x_1' & - \ x_1'' & +3x_2 & +2x_3 & +s_1 & & & = 30 \\
 & x_1' & - \ x_1'' & + \ x_2 & + \ x_3 & & +s_2 & & = 24 \\
 & 3x_1' & -3x_1'' & +5x_2 & +3x_3 & & & +s_3 & = 60 \\
 & x_1', & x_1'', & x_2, & x_3, & s_1, & s_2, & s_3 & \geq \ 0
\end{array}
$$

Willekeurig LP $\Rightarrow$ standaard probleem: voorbeeld 2

$$\begin{array}{lrrrl}
\text{min } Z = & 3x_1 & +8x_2 & +5x_3 & \\
\text{onder voorwaarden} & & 3x_2 & +4x_3 & \geq 70 \\
 & 3x_1 & +5x_2 & +2x_3 & \geq 70 \\
 & x_1 & x_2, & x_3 & \geq \ \ 0
\end{array}$$

wordt

$$\begin{array}{lrrrrrl}
\text{max } -Z = & -3x_1 & -8x_2 & -5x_3 & & & \\
\text{onder voorwaarden} & & +3x_2 & +4x_3 & -s_1 & & = 70 \\
 & 3x_1 & +5x_2 & +2x_3 & & -s_2 & = 70 \\
 & x_1 & x_2, & x_3, & s_1, & s_2 & \geq \ \ 0
\end{array}$$

Grafische methode voor twee variabelen (1)

Opbrengst $Z = 300x_1 + 500x_2 - 36000$

$$\begin{array}{ll} \text{Machine A:} & x_1 + 2x_2 \leq 170 \\ \text{Machine B:} & x_1 + x_2 \leq 150 \\ \text{Machine C:} & 3x_2 \leq 180 \end{array}$$

$x_1, x_2 \geq 0$

Mogelijke interpretatie?

Grafische methode voor twee variabelen (1)

Opbrengst $Z = 300x_1 + 500x_2 - 36000$

$$\begin{array}{lr} \text{Machine A:} & x_1 + 2x_2 \leq 170 \\ \text{Machine B:} & x_1 + x_2 \leq 150 \\ \text{Machine C:} & 3x_2 \leq 180 \end{array}$$

$x_1,\ x_2 \geq 0$

Mogelijke interpretatie:

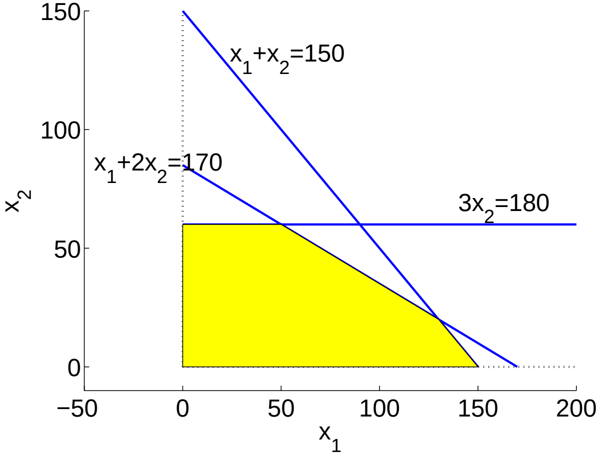
- Beslissingsvariabelen x_1, x_2 representeren jaarlijkse aantallen van product typen 1, 2
- Type 1 vergt 1 dag productietijd op machine A en 1 dag op machine B, en genereert opbrengst 300 Euro
- Type 2 vergt 2 dagen productietijd op machine A, 1 dag op machine B en 3 dagen op machine C, en genereert opbrengst 500 Euro
- Machines A, B, en C zijn jaarlijks respectievelijk 170, 150 en 180 dagen beschikbaar voor productie
- Jaarlijkse vaste kosten bedragen 36000 Euro

Grafische methode voor twee variabelen (2)

Opbrengst $Z = 300x_1 + 500x_2 - 36000$

$$\begin{aligned} \text{Machine A:} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 170 \\ \text{Machine B:} \quad & x_1 + x_2 \leq 150 \\ \text{Machine C:} \quad & 3x_2 \leq 180 \end{aligned}$$

$x_1,\ x_2 \geq 0$



Grafische methode voor twee variabelen (3)

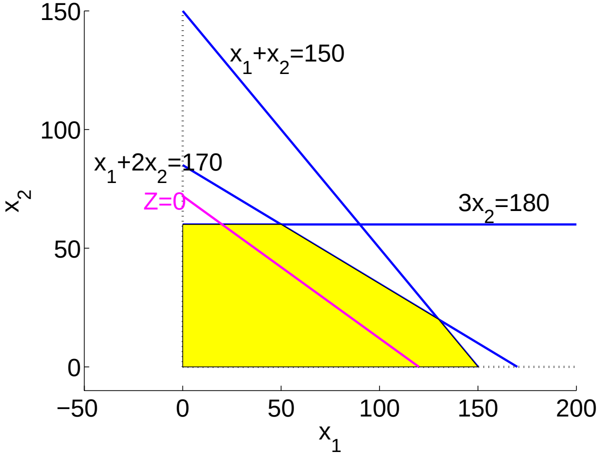
Opbrengst $Z = 300x_1 + 500x_2 - 36000$

Machine A: $x_1 + 2x_2 \leq 170$

Machine B: $x_1 + x_2 \leq 150$

Machine C: $3x_2 \leq 180$

$x_1,\ x_2 \geq 0$



Grafische methode voor twee variabelen (4)

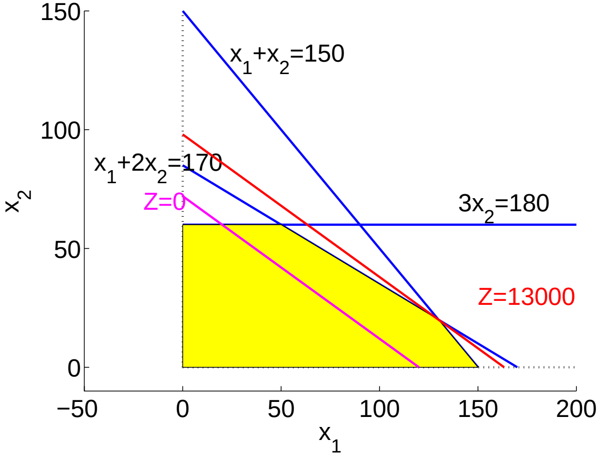
Opbrengst $Z = 300x_1 + 500x_2 - 36000$

Machine A: $x_1 + 2x_2 \leq 170$

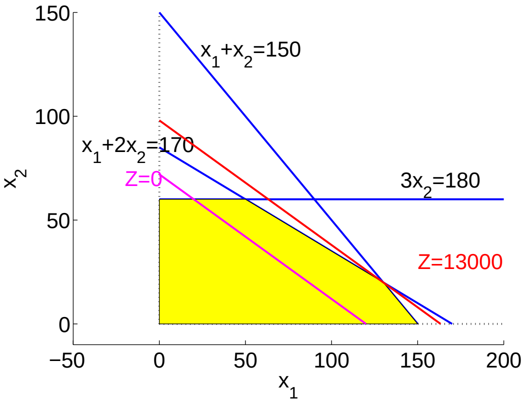
Machine B: $x_1 + x_2 \leq 150$

Machine C: $3x_2 \leq 180$

$x_1,\ x_2 \geq 0$



Grafische methode voor twee variabelen (5)



- Lijn $Z =$ constant (niveau-kromme) evenwijdig verschuiven tot net nog in toegelaten gebied
- Optimale oplossing in hoekpunt; is altijd zo!

Eenvoudige LP problemen

Beschouw probleem

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{maximaliseer } Z = & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & \\
\text{onder voorwaarden} & \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j & \leq & b_i \text{ voor } i = 1, \ldots, m \\
 & x_j & \geq & 0 \text{ voor } j = 1, \ldots, n
\end{array}
$$

waar $b_i \geq 0$ voor $i = 1, \ldots, m$

Aannamen

- Doelstelling is maximaliseren
- Alle functionele restricties zijn $\leq$-voorwaarden met $b_i \geq 0$
- Alle beslissingsvariabelen x_j hebben niet-negativiteitsrestrictie

Eerste voorbeeld (1)

$$\begin{array}{rcrrcr}
\text{maximaliseer } Z & = & 3x_1 & +5x_2 & & \\
\text{onder voorwaarden} & & x_1 & & \leq & 4 \\
 & & & 2x_2 & \leq & 12 \\
 & & 3x_1 & +2x_2 & \leq & 18 \\
 & & x_1, & x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

Herschrijf naar standaard vorm:
voeg slack variabelen toe aan functionele restricties:

$$\begin{array}{rcrrrrrcr}
\text{maximaliseer } Z & = & 3x_1 & +5x_2 & & & & & \\
\text{onder voorwaarden} & & x_1 & & +s_1 & & & = & 4 \\
 & & & 2x_2 & & +s_2 & & = & 12 \\
 & & 3x_1 & +2x_2 & & & +s_3 & = & 18 \\
 & & x_1, & x_2, & s_1, & s_2, & s_3 & \geq & 0
\end{array}$$

Eerste voorbeeld (2)

Merk op:

$$
\begin{array}{rcrrrrrcr}
\text{maximaliseer } Z & = & 3x_1 & +5x_2 & & & & & \\
\text{onder voorwaarden} & & x_1 & & +s_1 & & & = & 4 \\
 & & & 2x_2 & & +s_2 & & = & 12 \\
 & & 3x_1 & +2x_2 & & & +s_3 & = & 18 \\
 & & x_1, & x_2, & s_1, & s_2, & s_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

kunnen we ook schrijven als:

$$
\begin{array}{rcrrrrrcr}
\text{maximaliseer} & Z & & & & & & & \\
\text{onder voorwaarden} & Z & -3x_1 & -5x_2 & & & & = & 0 \\
 & & x_1 & & +s_1 & & & = & 4 \\
 & & & 2x_2 & & +s_2 & & = & 12 \\
 & & 3x_1 & +2x_2 & & & +s_3 & = & 18 \\
 & & x_1, & x_2, & s_1, & s_2, & s_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Simplex methode is iteratief algoritme om voor zo'n type probleem optimale oplossing te vinden.

Ruwe schets van Simplex methode

- Vind toegelaten oplossing.
  - Makkelijk voor ‘eenvoudige’ LP problemen
  - Moeilijker voor willekeurige LP problemen $\Rightarrow$ volgende keer
- Voer verbetering stappen uit totdat je niet meer verder kunt.
  Je hebt dan optimale oplossing gevonden.

Toegelaten oplossing vinden

Terug naar voorbeeld:

$$
\begin{array}{rcrrrrrcr}
\text{maximaliseer} & Z & & & & & & & \\
\text{onder voorwaarden} & Z & -3x_1 & -5x_2 & & & & = & 0 \\
 & & x_1 & & +s_1 & & & = & 4 \\
 & & & 2x_2 & & +s_2 & & = & 12 \\
 & & 3x_1 & +2x_2 & & & +s_3 & = & 18 \\
 & & x_1, & x_2, & s_1, & s_2, & s_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Toegelaten oplossing is hier eenvoudig af te lezen:
$s_1 = 4$, $s_2 = 12$, $s_3 = 18$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$.

Verbetering stap

$$
\begin{array}{rrrrrrcr}
Z & -3x_1 & -5x_2 & & & & = & 0 \\
 & x_1 & & +s_1 & & & = & 4 \\
 & & 2x_2 & & +s_2 & & = & 12 \\
 & 3x_1 & +2x_2 & & & +s_3 & = & 18 \\
 & x_1, & x_2, & s_1, & s_2, & s_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Als $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $s_1 = 4$, $s_2 = 12$ en $s_3 = 18$, dan $Z = 0$.

- We kunnen Z groter maken door x_2 groter te maken...
- ... maar dan moeten we s_2 en s_3 kleiner maken.
- Hoeveel kunnen we x_2 groter maken zonder dat s_2 of s_3 negatief worden?
  - Uit $2x_2 + s_2 = 12$ volgt dat x_2 hoogstens 6 mag worden.
  - Uit $3x_1 + 2x_2 + s_3 = 18$ volgt dat x_2 hoogstens 9 mag worden.
- We kunnen x_2 niet groter maken dan 6.
  Als $x_2 = 6$, dan $s_2 = 0$ en $s_3 = 6$.

We hebben nu $x_1 = 0$, $x_2 = 6$, $s_1 = 4$, $s_2 = 0$, $s_3 = 6$ en $Z = 30$.

Wat gebeurt er algebraïsch?

$$
\begin{array}{ccccccccc}
Z & -3x_1 & -5x_2 & & & & = & 0 \\
 & x_1 & & +s_1 & & & = & 4 \\
 & & 2x_2 & & +s_2 & & = & 12 \\
 & 3x_1 & +2x_2 & & & +s_3 & = & 18 \\
 & x_1, & x_2, & s_1, & s_2, & s_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Derde vergelijking delen door 2 geeft $x_2 + \frac{1}{2}s_2 = 6$.

Substitutie van $x_2 = 6 - \frac{1}{2}s_2$ in overige vergelijkingen geeft:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
Z & -3x_1 & & & 2\frac{1}{2}s_2 & & = & 30 \\
 & x_1 & & +s_1 & & & = & 4 \\
 & & x_2 & & +\frac{1}{2}s_2 & & = & 6 \\
 & 3x_1 & & & -s_2 & +s_3 & = & 6 \\
 & x_1, & x_2, & s_1, & s_2, & s_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

We kunnen aflezen dat $x_1 = 0$, $x_2 = 6$, $s_1 = 4$, $s_2 = 0$ en $s_3 = 6$ toegelaten oplossing is met $Z = 30$: één verbetering stap.

Simplex tableau (1)

We plaatsen

$$\begin{array}{rrrrrrcr} Z & -3x_1 & -5x_2 & & & & = & 0 \\ & x_1 & & +s_1 & & & = & 4 \\ & & 2x_2 & & +s_2 & & = & 12 \\ & 3x_1 & +2x_2 & & & +s_3 & = & 18 \\ & x_1, & x_2, & s_1, & s_2, & s_3 & \geq & 0 \end{array}$$

in tableau:

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	-3	-5	0	0	0	0
s_1	0	1	0	1	0	0	4
s_2	0	0	2	0	1	0	12
s_3	0	3	2	0	0	1	18

Tableau bevat zelfde informatie als gelijkheden en niet-negativiteits restricties, maar scheelt schrijfwerk!

Simplex tableau (2)

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	-3	-5	0	0	0	0
s_1	0	1	0	1	0	0	4
s_2	0	0	2	0	1	0	12
s_3	0	3	2	0	0	1	18

- Variabelen in meest linker kolom zijn basisvariabelen;
  hier zijn het s_1, s_2 en s_3.
  Verzameling van basisvariabelen noemen we basis van tableau.
  Er staan eenheidsvectoren in kolommen van basisvariabelen.
  Waarden van basisvariabelen kunnen we aflezen uit meest rechterkolom van tableau.
- Overige variabelen zijn niet-basisvariabelen van tableau;
  hier zijn het x_1 en x_2.
  Niet-basisvariabelen hebben altijd waarde 0.
- Toegelaten oplossing noemen we toegelaten basisoplossing;
  hier is $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $s_1 = 4$, $s_2 = 12$ en $s_3 = 18$ toegelaten basisoplossing.

Simplex tableau (3)

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	-3	-5	0	0	0	0
s_1	0	1	0	1	0	0	4
s_2	0	0	2	0	1	0	12
s_3	0	3	2	0	0	1	18

- Getallen -3, -5, 0, 0 en 0 in rij met Z zijn gereduceerde kostencoëfficiënten.
  Voor basisvariabelen zijn deze altijd $= 0$.
- Minstens één gereduceerde kostencoëfficiënten is negatief: toegelaten oplossing is niet optimaal.

Altijd controleren!

- In kolommen van basisvariabelen staan eenheidsvectoren.
- Gereduceerde kostencoëfficiënten van basisvariabelen zijn 0.
- In meest rechterkolom staan niet-negatieve getallen (behalve in eerste rij met Z).

Verbetering stap (1)

Algemeen principe

- We gaan nieuw Simplex tableau opstellen, waaruit we betere toegelaten basisoplossing kunnen aflezen.
- We verwijderen één variabele uit basis uittredende variabele) en voegen nieuwe variabele toe (intredende variabele).

Verbetering stap (2)

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	-3	-5	0	0	0	0
s_1	0	1	0	1	0	0	4
s_2	0	0	2	0	1	0	12
s_3	0	3	2	0	0	1	18

- Gereduceerde kostencoëfficiënt van x_2 is -5: negatief, dus nog niet optimaal.
- x_2 wordt intredende variabele, en komt in basis.
- Minimum ratio test:
  - Voor elke rij neem rechterzijde constante en deel deze door element in kolom van x_2 indien dat getal positief is.
  - Neem minimum hierover. Dit bepaalt uittredende variabele. In dit geval is het s_2, die basis uitgaat.
- We hebben nieuwe basis: s_1, x_2, s_3.

Verbetering stap (3)

- Kolom van intredende variabele: pivot kolom.
  Rij van uittredende variabele: pivot rij.
  Element dat in pivot kolom en pivot rij zit: pivot element.
- We hebben nieuwe basis. We moeten
  - kolommen van intredende basisvariabele tot onafhankelijke eenheidsvector maken
  - gereduceerde kostencoëfficiënten van intredende basisvariabele 0 maken

  Voer rij operaties uit om dat te bereiken.

Verbetering stap (4)

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	-3	-5	0	0	0	0
s_1	0	1	0	1	0	0	4
s_2	0	0	2	0	1	0	12
s_3	0	3	2	0	0	1	18

Na rij operaties

- trek derde rij af van vierde rij

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	-3	-5	0	0	0	0
s_1	0	1	0	1	0	0	4
s_2	0	0	2	0	1	0	12
s_3	0	3	0	0	-1	1	6

Verbetering stap (5)

dan

- deel derde rij door 2

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	-3	-5	0	0	0	0
s_1	0	1	0	1	0	0	4
s_2	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
s_3	0	3	0	0	-1	1	6

Verbetering stap (6)

en tenslotte

- tel 5 maal derde rij op bij eerste rij

verkrijgen we:

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	-3	0	0	$2\frac{1}{2}$	0	30
s_1	0	1	0	1	0	0	4
x_2	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
s_3	0	3	0	0	-1	1	6

We kunnen aflezen dat $s_1 = 4$, $x_2 = 6$, $s_3 = 6$, $x_1 = 0$ en $s_2 = 0$ toegelaten oplossing is met $Z = 30$.

Verbetering stap (7)

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	-3	0	0	$2\frac{1}{2}$	0	30
s_1	0	1	0	1	0	0	4
x_2	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
s_3	0	3	0	0	-1	1	6

- Gereduceerde kostencoëfficiënt van x_1 is -3: negatief, dus nog niet optimaal
- x_1 wordt intredende variabele
- Minimum ratio test
  Neem rij i waarvoor $a_{i,x_1} > 0$ en $\frac{b_i}{a_{i,x_1}}$ minimaal is:
  - Rij s_1 geeft $\frac{b_{s_1}}{a_{s_1,x_1}} = \frac{4}{1} = 4$;
  - Rij x_2 moeten we overslaan want a_{x_2,x_1} is niet positief;
  - Rij s_3 geeft $\frac{b_{s_3}}{a_{s_3,x_1}} = \frac{6}{3} = 2$.

  Minimum is 2, dus neem rij s_3, en s_3 als uittredende variabele.

Verbetering stap (8)

Na rij operaties

- tel vierde rij op bij eerste rij

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	0	0	0	$1\frac{1}{2}$	1	36
s_1	0	1	0	1	0	0	4
x_2	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
s_3	0	3	0	0	-1	1	6

dan

- deel vierde rij door 3

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	0	0	0	$1\frac{1}{2}$	1	36
s_1	0	1	0	1	0	0	4
x_2	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
s_3	0	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2

Verbetering stap (9)

tenslotte

- trek vierde rij af van tweede rij

verkrijgen als nieuw simplex tableau:

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	0	0	0	$1\frac{1}{2}$	1	36
s_1	0	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2
x_2	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
x_1	0	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2

We kunnen aflezen dat $x_1 = 2$, $x_2 = 6$, $s_1 = 2$, $s_2 = 0$ en $s_3 = 0$ toegelaten oplossing is met $Z = 36$.

Omdat alle gereduceerde kostencoëfficiënten niet-negatief zijn, is deze oplossing optimaal.

Samenvatting van vandaag

- In woorden geformuleerd optimaliseringsprobleem vertalen naar wiskundig probleem
- Lineair Programmeringsprobleem (LP probleem)
- Toegelaten oplossingen, niet-toegelaten oplossingen, toegelaten gebied, optimale oplossing, optimale waarde
- Standaard LP probleem
- Herschrijven willekeurig LP probleem naar standaard LP probleem
- Grafische methode voor oplossen LP problemen met twee beslissingsvariabelen
- Simplex methode voor oplossen van LP problemen met twee of meer beslissingsvariabelen
  - Vandaag voor 'eenvoudige' LP problemen
  - Volgende keer voor willekeurige LP problemen