Enkele mededelingen

Instructies (vandaag, 10:45–12:30) in vier zalen:

Zaal	**voor studenten met achternaam beginnend**
Aud 10	met letters A tot en met D
Pav b2	met letters E tot en met K
Pav m23	met letters L tot en met R
Ipo 0.98	met letters S tot en met Z

Voor gedetailleerde informatie en college materiaal:

`www.win.tue.nl/~gwoegi/2DD50/OPT/`

Waar waren we ook al weer gebleven?

Vorige keer

- In woorden geformuleerd optimaliseringsprobleem vertalen naar wiskundig probleem
- Lineair Programmeringsprobleem (LP probleem)
- Herschrijven willekeurig LP probleem naar standaard LP probleem
- Grafische methode voor oplossen LP problemen met twee beslissingsvariabelen

Vandaag

- Simplex methode voor oplossen van LP problemen met twee of meer beslissingsvariabelen
  - Vorige keer voor 'eenvoudige' LP problemen
  - Vandaag voor willekeurige LP problemen

Ruwe schets van Simplex methode

- Vind toegelaten oplossing.
  - Makkelijk voor ‘eenvoudige’ LP problemen
  - Moeilijker voor willekeurige LP problemen
- Voer verbetering stappen uit totdat je niet meer verder kunt. Je hebt dan optimale oplossing gevonden.

Eenvoudige LP problemen (1)

Beschouw probleem

$$\begin{array}{lll} \text{maximaliseer } Z = & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ \text{onder voorwaarden} & \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j & \leq \quad b_i \text{ voor } i = 1, \ldots, m \\ & x_j & \geq \quad 0 \text{ voor } j = 1, \ldots, n \end{array}$$

waar $b_i \geq 0$ voor $i = 1, \ldots, m$

Aannamen

- Doelstelling is maximaliseren
- Alle functionele restricties zijn $\leq$-voorwaarden met $b_i \geq 0$
- Alle beslissingsvariabelen x_j hebben niet-negativiteitsrestrictie

Eenvoudige LP problemen (2)

Restrictie $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j \leq b_i$ is te schrijven als $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j + s_i = b_i$, waar $s_i \geq 0$

Door beslissingsvariabelen $x_i = 0$ en slack variabelen $s_i = b_i$ te kiezen, is op eenvoudige wijze toegelaten oplossing te vinden.

Dat kan dankzij aanname:

- Alle functionele restricties zijn $\leq$-voorwaarden met $b_i \geq 0$

Wanneer niet aan deze aanname is voldaan, kan dat in het algemeen niet $\Rightarrow$ moeilijk LP probleem.

Verbetering stap (1)

Simplex methode genereert op iteratieve wijze toegelaten basisoplossingen

Algemeen principe

- We gaan nieuw Simplex tableau opstellen, waaruit we betere toegelaten basisoplossing kunnen aflezen.
- We verwijderen één variabele uit basis (uittredende variabele) en voegen nieuwe variabele toe (intredende variabele).

Verbetering stap (2)

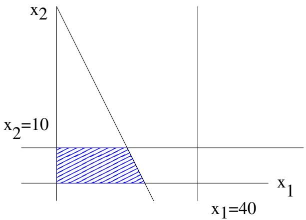
- Kies niet-basisvariabele met negatieve gereduceerde kostencoëfficiënt als intredende variabele.
  - Kolom van intredende variabele: pivot kolom.
- Gebruik minimum ratio test om uittredende basisvariabele te bepalen.
  - Rij van uittredende variabele: pivot rij.
- Element dat in pivot kolom en pivot rij zit: pivot element.
- We hebben nieuwe basis. We moeten
  - kolom van intredende basisvariabele tot onafhankelijke eenheidsvector maken
  - in het bijzonder gereduceerde kostencoëfficiënt van intredende basisvariabele 0 maken

  Voer rij operaties uit om dat te bereiken.

Tweede voorbeeld (1)

$$
\begin{array}{rcrrcr}
\text{maximaliseer } Z & = & 120x_1 & +80x_2 & & \\
\text{onder voorwaarden} & & x_1 & & \leq & 40 \\
 & & & x_2 & \leq & 10 \\
 & & 20x_1 & +10x_2 & \leq & 500 \\
 & & x_1, & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Toegelaten gebied:



Tweede voorbeeld (2)

Herschrijf naar standaard vorm:
voeg slack variabelen toe aan functionele restricties:

$$
\begin{array}{lcrrrrrcr}
\text{maximaliseer} & Z & & & & & & & \\
\text{onder voorwaarden} & Z & -120x_1 & -80x_2 & & & & = & 0 \\
& & x_1 & & +s_1 & & & = & 40 \\
& & & x_2 & & +s_2 & & = & 10 \\
& & 20x_1 & +10x_2 & & & +s_3 & = & 500 \\
& & x_1, & x_2, & s_1, & s_2, & s_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Tweede voorbeeld (3)

Neem slack variabelen als basisvariabelen.

Simplex tableau is:

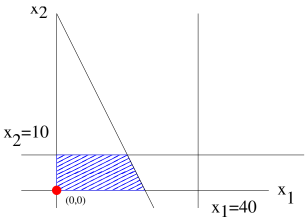
	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	-120	-80	0	0	0	0
s_1	0	1	0	1	0	0	40
s_2	0	0	1	0	1	0	10
s_3	0	20	10	0	0	1	500

We kunnen aflezen dat $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $s_1 = 40$, $s_2 = 10$, $s_3 = 500$ toegelaten basisoplossing is met $Z = 0$.

Tweede voorbeeld (4)

Met andere woorden, $x_1 = 0$ en $x_2 = 0$ is toegelaten oplossing van

$$\begin{array}{lrrrrr} \text{maximaliseer} & Z = & 120x_1 & +80x_2 & & \\ \text{onder} & & x_1 & & \leq & 40 \\ & & & x_2 & \leq & 10 \\ & & 20x_1 & +10x_2 & \leq & 500 \\ & & x_1, & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$



Tweede voorbeeld (5)

Simplex tableau is:

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	-120	-80	0	0	0	0
s_1	0	1	0	1	0	0	40
s_2	0	0	1	0	1	0	10
s_3	0	20	10	0	0	1	500

Controle

- In kolommen van basisvariabelen staan eenheidsvectoren.
- Gereduceerde kostencoëfficiënten van basisvariabelen zijn 0.
- In meest rechterkolom staan niet-negatieve getallen (behalve in eerste rij met Z).

Tweede voorbeeld (6)

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	-120	-80	0	0	0	0
s_1	0	1	0	1	0	0	40
s_2	0	0	1	0	1	0	10
s_3	0	20	10	0	0	1	500

- Gereduceerde kostencoëfficiënt van x_1 is -120: negatief, dus niet optimaal
- x_1 wordt intredende variabele.
- Minimum ratio test
  Neem rij i waarvoor $a_{i,x_1} > 0$ en $\frac{b_i}{a_{i,x_1}}$ minimaal is;
  - Rij s_1 geeft $\frac{b_{s_1}}{a_{s_1,x_1}} = \frac{40}{1} = 40$;
  - Rij s_2 moeten we overslaan want a_{s_2,x_1} is niet positief;
  - Rij s_3 geeft $\frac{b_{s_3}}{a_{s_3,x_1}} = \frac{500}{20} = 25$.

  Minimum is 25, dus neem rij s_3, en s_3 als uittredende variabele.

Tweede voorbeeld (7)

Na rij operaties

- tel 6 maal vierde rij op bij eerste rij

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	0	-20	0	0	6	3000
s_1	0	1	0	1	0	0	40
s_2	0	0	1	0	1	0	10
s_3	0	20	10	0	0	1	500

Tweede voorbeeld (8)

dan

- deel vierde rij door 20

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	0	-20	0	0	6	3000
s_1	0	1	0	1	0	0	40
s_2	0	0	1	0	1	0	10
s_3	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{20}$	25

Tweede voorbeeld (9)

tenslotte

- trek vierde rij af van tweede rij

verkrijgen we

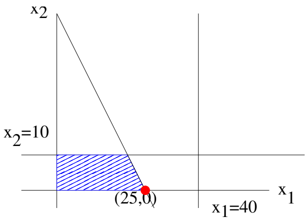
	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	0	-20	0	0	6	3000
s_1	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{20}$	15
s_2	0	0	1	0	1	0	10
x_1	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{20}$	25

We kunnen aflezen dat $x_1 = 25$, $x_2 = 0$, $s_1 = 15$, $s_2 = 10$ en $s_3 = 0$ toegelaten basisoplossing is met $Z = 3000$.

Tweede voorbeeld (10)

$x_1 = 25$ en $x_2 = 0$ is toegelaten oplossing van

$$
\begin{array}{rrrrrr}
\text{maximaliseer} & Z = & 120x_1 & +80x_2 & & \\
\text{onder voorwaarden} & & x_1 & & \leq & 40 \\
 & & & x_2 & \leq & 10 \\
 & & 20x_1 & +10x_2 & \leq & 500 \\
 & & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$



Tweede voorbeeld (11)

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	0	-20	0	0	6	3000
s_1	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{20}$	15
s_2	0	0	1	0	1	0	10
x_1	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{20}$	25

- Gereduceerde kostencoëfficiënt van x_2 is -20: negatief, dus niet optimaal.
- x_2 wordt intredende variabele.
- Minimum ratio test:
  Neem rij i waarvoor $a_{i,x_2} > 0$ en $\frac{b_i}{a_{i,x_2}}$ minimaal is;
  - Rij s_1 moeten we overslaan want a_{s_1,x_2} is niet positief;
  - Rij s_2 geeft $\frac{b_{s_2}}{a_{s_2,x_2}} = \frac{10}{1} = 10$;
  - Rij x_1 geeft $\frac{b_{s_3}}{a_{x_1,x_2}} = \frac{25}{1/2} = 50$.

  Minimum is 10, dus neem rij s_2, en s_2 als uittredende variabele.

Tweede voorbeeld (12)

Na rij operaties

- tel 20 maal derde rij op bij eerste rij

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	0	0	0	20	6	3200
s_1	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{20}$	15
s_2	0	0	1	0	1	0	10
x_1	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{20}$	25

Tweede voorbeeld (13)

dan

- tel $\frac{1}{2}$ maal derde rij op bij tweede rij

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	0	0	0	20	6	3200
s_1	0	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{20}$	20
s_2	0	0	1	0	1	0	10
x_1	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{20}$	25

Tweede voorbeeld (14)

tenslotte

- trek $\frac{1}{2}$ maal derde rij af van vierde rij

verkrijgen we

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	0	0	0	20	6	3200
s_1	0	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{20}$	20
x_2	0	0	1	0	1	0	10
x_1	0	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{20}$	20

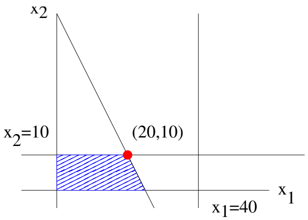
We kunnen aflezen dat $x_1 = 20$, $x_2 = 10$, $s_1 = 20$, $s_2 = 0$ en $s_3 = 0$ toegelaten basisoplossing is met $Z = 3200$.

Omdat alle gereduceerde kostencoëfficiënten niet-negatief zijn, is deze oplossing optimaal.

Tweede voorbeeld (15)

$x_1 = 20$ en $x_2 = 10$ is optimale oplossing van

$$
\begin{array}{rrrrrr}
\text{maximaliseer} & Z = & 120x_1 & +80x_2 & & \\
\text{onder voorwaarden} & & x_1 & & \leq & 40 \\
 & & & x_2 & \leq & 10 \\
 & & 20x_1 & +10x_2 & \leq & 500 \\
 & & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$



Wat doet Simplex methode grafisch gezien?

Simplex methode gaat van hoekpunt (CPF) naar hoekpunt (CPF)

Wat zijn basisvariabelen?

- Elke verzameling van variabelen waarvoor corresponderende kolommen lineaire basis vormen (i.e. stelsel lineair onafhankelijke vectoren) kan basis (in Simplex methode) zijn.
  - Variabelen in basis worden basisvariabelen genoemd.
  - Overige variabelen worden niet-basisvariabelen genoemd.
- Stel we hebben basis, en maak niet-basisvariabelen 0.
  - We kunnen dan waarden van basisvariabelen uitrekenen.
  - Verkregen oplossing wordt basisoplossing genoemd.
- Basisoplossing waarin elke variabele niet-negatief is, wordt toegelaten basisoplossing genoemd.
- Optimale oplossing is altijd toegelaten basisoplossing.

Onbegrensde LP problemen

Minimum ratio test: Vind in kolom van intredende variabele x_j rij i waarvoor linkerzijde constante a_{i,x_j} positief en $b_i/a_{i,x_j}$ minimaal is.

Wat als er echter geen enkele positieve a_{i,x_j} is?

Als er niet-basisvariabele bestaat met negatieve gereduceerde kostencoëfficiënt en corresponderende kolom heeft alleen maar niet-positieve elementen, dan kunnen we intredende basisvariabele en dus Z willekeurig groot maken: LP probleem is onbegrensd.

Voorbeeld onbegrensd LP probleem

Beschouw probleem:

$$\begin{array}{lcllcl} \text{maximaliseer } Z & = & x_1 & +x_2 & & \\ \text{onder voorwaarden} & & -x_1 & +2x_2 & \leq & 1 \\ & & & x_2 & \leq & 1 \\ & & x_1, & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Simplex tableau:

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	b
Z	1	-1	-1	0	0	0
s_1	0	-1	2	1	0	1
s_2	0	0	1	0	1	1

Gereduceerde kostencoëfficiënten van niet-basisvariabele x_1 is negatief en alle elementen in corresponderende kolom zijn niet-positief $\Rightarrow$ Onbegrensd probleem.

Gedegenereerde gevallen

Wat als b_i van uittredende variabele 0 is?

- Bij verbetering stap wordt Z niet groter.
- Dit is probleem omdat Simplex methode dan oneindig kan lopen zonder optimale oplossing te vinden.
- Er bestaan methoden om dit probleem te omzeilen, maar deze zullen verder niet aan de orde komen in dit vak.

Meerdere optimale oplossingen

Wat als alle gereduceerde kostencoëfficiënten niet-negatief zijn, maar gereduceerde kostencoëffiënt van niet-basisvariabele is 0?

- Dan kunnen we intredende basisvariabele groter maken en uittredende basisvariabele kleiner maken zonder dat Z verandert: er zijn meerdere optimale oplossingen.

Voorbeeld meerdere optimale oplossingen (1)

Beschouw probleem:

$$\begin{array}{llllll} \text{maximaliseer } Z & = & 3x_1 & +2x_2 & & \\ \text{onder voorwaarden} & & 3x_1 & +2x_2 & \leq & 3 \\ & & x_1 & +3x_2 & \leq & 3 \\ & & x_1 & -4x_2 & \leq & 2 \\ & & x_1, & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Simplex tableau:

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	-3	-2	0	0	0	0
s_1	0	3	2	1	0	0	3
s_2	0	1	3	0	1	0	3
s_3	0	1	-4	0	0	1	2

Er zijn negatieve gereduceerde kostencoëfficiënten, dus niet optimaal.

Voorbeeld meerdere optimale oplossingen (2)

We nemen x_1 als intredende variabele.

Minimum ratio test geeft s_1 als uittredende variabele.

Na rij operaties verkrijgen we:

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	0	0	1	0	0	3
x_1	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	1
s_2	0	0	$2\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	0	2
s_3	0	0	$-4\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	1	1

Toegelaten oplossing $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $s_1 = 0$, $s_2 = 2$, $s_3 = 1$ met waarde $Z = 3$. Alle gereduceerde kostencoëfficiënten van niet-basisvariabelen zijn niet-negatief, dus optimaal.

Gereduceerde kostencoëfficiënt van niet-basisvariabele x_2 is echter 0, en er zijn meerdere optimale oplossingen.

Voorbeeld meerdere optimale oplossingen (3)

Hoe kunnen we zien dat er meerdere optimale oplossingen zijn?

Voer verbetering stap uit met x_2 als intredende variabele.

Minimum ratio test geeft s_2 als uittredende variabele.

Na rij operaties verkrijgen we:

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	0	0	1	0	0	3
x_1	0	1	0	$\frac{3}{7}$	$-\frac{2}{7}$	0	$\frac{3}{7}$
x_2	0	0	1	$-\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$	0	$\frac{6}{7}$
s_3	0	0	0	-1	2	1	5

Toegelaten oplossing $x_1 = 3/7$, $x_2 = 6/7$, $s_1 = 0$, $s_2 = 0$, $s_3 = 5$ met waarde $Z = 3$. Alle gereduceerde kostencoëfficiënten van niet-basisvariabelen zijn niet-negatief, dus optimaal.

Voorbeeld van moeilijk LP probleem (1)

$$
\begin{array}{lrrrrl}
\text{maximaliseer } Z & = 3x_1 & +2x_2 & -x_3 & & \\
\text{onder voorwaarden} & 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 8 \\
 & x_1 & +x_2 & & \leq & 10 \\
 & -x_1 & -3x_2 & & \leq & -20 \\
 & x_1, & x_2, & x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Maak alle rechterzijde constanten niet-negatief

$$
\begin{array}{lrrrrl}
\text{maximaliseer } Z & = 3x_1 & +2x_2 & -x_3 & & \\
\text{onder voorwaarden} & 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 8 \\
 & x_1 & +x_2 & & \leq & 10 \\
 & x_1 & +3x_2 & & \geq & 20 \\
 & x_1, & x_2, & x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Voorbeeld van moeilijk LP probleem (2)

Introduceer slack (+) en surplus (-) variabelen:

$$
\begin{array}{lcrrrrrcl}
\text{maximaliseer } Z & = & 3x_1 & +2x_2 & -x_3 & & & & \\
\text{onder voorwaarden} & & 2x_1 & +x_2 & +x_3 & & & = & 8 \\
 & & x_1 & +x_2 & & +s_1 & & = & 10 \\
 & & x_1 & +3x_2 & & & -s_2 & = & 20 \\
 & & x_1, & x_2, & x_3, & s_1, & s_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Is op eenvoudige wijze toegelaten basis oplossing af te lezen?

Nee! Probleem is dat $s_2 = -20$ niet toegelaten is.

Kunstmatige variabelen (1)

$$
\begin{array}{rrrrrcl}
2x_1 & +x_2 & +x_3 & & & = & 8 \\
x_1 & +x_2 & & +s_1 & & = & 10 \\
x_1 & +3x_2 & & & -s_2 & = & 20 \\
x_1, & x_2, & x_3, & s_1, & s_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Introduceer nieuwe variabelen, voeg deze toe aan elke vergelijking die géén slack variabele $(+)$ bevat,
en voeg niet-negativiteitsrestricties toe voor deze variabelen:

$$
\begin{array}{lllllllcl}
2x_1 & +x_2 & +x_3 & & & +a_1 & & = & 8 \\
x_1 & +x_2 & & +s_1 & & & & = & 10 \\
x_1 & +3x_2 & & & -s_2 & & +a_2 & = & 20 \\
x_1, & x_2, & x_3, & s_1, & s_2, & a_1, & a_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Variabelen a_1, a_2 worden kunstmatige variabelen genoemd.

Kunstmatige variabelen (2)

$$\begin{array}{llllllllll}
2x_1 & +x_2 & +x_3 & & & +a_1 & & = & 8 \\
x_1 & +x_2 & & +s_1 & & & & = & 10 \\
x_1 & +3x_2 & & & -s_2 & & +a_2 & = & 20 \\
x_1, & x_2, & x_3, & s_1, & s_2, & a_1, & a_2 & \geq & 0
\end{array}$$

Nu is wel toegelaten basis oplossing af te lezen: $a_1 = 8$, $s_1 = 10$, $a_2 = 20$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $s_2 = 0$.

Echter: Oorspronkelijke LP probleem is anders!

$x_1 = 0$, $x_2 = 0$ en $x_3 = 0$ is géén toegelaten oplossing van oorspronkelijke LP probleem...

Kunstmatige variabelen (3)

Om toegelaten oplossing voor oorspronkelijke probleem te vinden, moeten we zorgen dat kunstmatige variabelen gelijk aan 0 worden.

Er bestaan twee methoden om dat te bereiken:

- 2-Fasen methode
- Big-M methode

2-Fasen methode – 1e fase

Vervang doelstellingsfunctie door minimalisatie van som van alle kunstmatige variabelen:

$$\text{minimaliseer } \widetilde{W} = \sum a_i,$$

of

$$\text{maximaliseer } W = -\sum a_i$$

$$\begin{array}{lcccccccccc}
\max\ W & = & -a_1 & -a_2 & & & & & & & \\
\text{onder} & & 2x_1 & +x_2 & +x_3 & & & +a_1 & & = & 8 \\
 & & x_1 & +x_2 & & +s_1 & & & & = & 10 \\
 & & x_1 & +3x_2 & & & -s_2 & & +a_2 & = & 20 \\
 & & x_1, & x_2, & x_3, & s_1, & s_2, & a_1, & a_2 & \geq & 0
\end{array}$$

1e fase: van probleem naar Simplex tableau (1)

	W	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	a_1	a_2	b
W	1	0	0	0	0	0	1	1	0
a_1	0	2	1	1	0	0	1	0	8
s_1	0	1	1	0	1	0	0	0	10
a_2	0	1	3	0	0	-1	0	1	20

Simplex tableau is niet in juiste vorm.

Gereduceerde kostencoëfficiënten van basisvariabelen a_1 en a_2 zijn ongelijk aan 0.

1e fase: van probleem naar Simplex tableau (2)

Zorg door middel van rij operaties dat gereduceerde kostencoëfficiënten van basisvariabelen 0 worden.

Simplex tableau in juiste vorm is:

	W	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	a_1	a_2	b
W	1	-3	-4	-1	0	1	0	0	-28
a_1	0	2	1	1	0	0	1	0	8
s_1	0	1	1	0	1	0	0	0	10
a_2	0	1	3	0	0	-1	0	1	20

Verbetering stap (1)

Simplex tableau in juiste vorm is:

	W	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	a_1	a_2	b
W	1	-3	-4	-1	0	1	0	0	-28
a_1	0	2	1	1	0	0	1	0	8
s_1	0	1	1	0	1	0	0	0	10
a_2	0	1	3	0	0	-1	0	1	20

Gereduceerde kostencoëfficiënten van x_1, x_2 en x_3 zijn negatief, dus nog niet optimaal.

We kiezen x_1 als intredende variabele.

Dan wordt a_1 uittredende variabele.

Nieuwe basis is x_1, s_1, a_2.

Verbetering stap (2)

Nieuw Simplex tableau is:

	W	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	a_1	a_2	b
W	1	0	$-2\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	$1\frac{1}{2}$	0	-16
x_1	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	4
s_1	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	6
a_2	0	0	$2\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	-1	$-\frac{1}{2}$	1	16

Gereduceerde kostencoëfficiënten van x_2 is negatief, dus nog niet optimaal.

We moeten x_2 als intredende variabele kiezen.

Dan wordt a_2 uittredende variabele.

Nieuwe basis is x_1, s_1, x_2.

Verbetering stap (3)

Nieuw Simplex tableau is:

	W	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	a_1	a_2	b
W	1	0	0	0	0	0	1	1	0
x_1	0	1	0	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$
s_1	0	0	0	$-\frac{2}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$2\frac{4}{5}$
x_2	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	0	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$6\frac{2}{5}$

Alle gereduceerde kostencoëfficiënten zijn niet-negatief, dus optimaal.

Echter: Optimaal voor aangepaste doelstellingsfunctie $W = -a_1 - a_2$, en nog niet voor oorspronkelijke doelstellingsfunctie $Z = 3x_1 + 2x_2 - x_3$!

2e fase

2e fase is afhankelijk van optimale waarde W^* gevonden in 1e fase:

- $W^* < 0$.
  - Oorspronkelijke LP probleem heeft geen toegelaten oplossing.
- $W^* = 0$, en geen enkele a_i is in basis.
  - Vergeet a_i's. Schrap kolommen van a_i's.
  - Vervang in optimale Simplex tableau 1e rij door oorspronkelijke doelstellingsfunctie.
  - Simplex tableau is mogelijk nog niet in juiste vorm, omdat gereduceerde kostencoëfficiënten van basisvariabelen ongelijk aan 0 kunnen zijn. Breng Simplex tableau eerst in juiste vorm.
  - Voer vervolgens 2e fase uit met behulp van Simplex methode.
- $W^* = 0$ en minstens één a_i is in basis.
  - Dit betekent dat $a_i = 0$ voor die variabele.
  - Zorg eerst dat alle a_i's uit basis verdwijnen.

Voorbeeld van 2e fase (1)

Simplex tableau na 1e fase is:

	W	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	a_1	a_2	b
W	1	0	0	0	0	0	1	1	0
x_1	0	1	0	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$
s_1	0	0	0	$-\frac{2}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$2\frac{4}{5}$
x_2	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	0	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$6\frac{2}{5}$

Voorbeeld van 2e fase (2)

Schrap alle kolommen van kunstmatige variabelen en vervang 1e rij door oorspronkelijke doelstellingsfunctie $Z = 3x_1 + 2x_2 - x_3$:

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	b
Z	1	-3	-2	1	0	0	0
x_1	0	1	0	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$
s_1	0	0	0	$-\frac{2}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	$2\frac{4}{5}$
x_2	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	0	$-\frac{2}{5}$	$6\frac{2}{5}$

Dit is nog niet in juiste vorm.

Gereduceerde kostencoëfficiënten van basisvariabelen x_1 en x_2 zijn ongelijk aan 0.

Voorbeeld van 2e fase (3)

Zorg door middel van rij operaties dat gereduceerde kostencoëfficiënten van basisvariabelen 0 worden.

Simplex tableau in juiste vorm is:

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	b
Z	1	0	0	$2\frac{2}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	$15\frac{1}{5}$
x_1	0	1	0	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$
s_1	0	0	0	$-\frac{2}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	$2\frac{4}{5}$
x_2	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	0	$-\frac{2}{5}$	$6\frac{2}{5}$

NB: basisvariabelen zijn dezelfde basisvariabelen als waar 1e fase mee eindigde.

Voorbeeld van 2e fase (4)

Oorspronkelijke LP probleem:

$$
\begin{array}{lcrrrcl}
\text{maximaliseer } Z & = & 3x_1 & +2x_2 & -x_3 & & \\
\text{onder voorwaarden} & & 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 8 \\
 & & x_1 & +x_2 & & \leq & 10 \\
 & & -x_1 & -3x_2 & & \leq & -20 \\
 & & x_1, & x_2, & x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

$x_1 = \frac{4}{5}$, $x_2 = 6\frac{2}{5}$ en $x_3 = 0$ is af te lezen als toegelaten oplossing.

Voorbeeld van 2e fase (5)

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	b
Z	1	0	0	$2\frac{2}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	$15\frac{1}{5}$
x_1	0	1	0	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$
s_1	0	0	0	$-\frac{2}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	$2\frac{4}{5}$
x_2	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	0	$-\frac{2}{5}$	$6\frac{2}{5}$

Simplex methode (s_2 in basis, x_1 eruit) levert

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	b
Z	1	1	0	3	0	0	16
s_2	0	5	0	3	0	1	4
s_1	0	-1	0	-1	1	0	2
x_2	0	0	1	1	0	0	8

Alle gereduceerde kostencoëfficiënten zijn niet-negatief, dus optimaal.

Optimale oplossing is $s_2 = 4$, $s_1 = 2$, $x_2 = 8$, $x_1 = x_3 = 0$, met $Z = 16$.

Voorbeeld van 2e fase (6)

Oorspronkelijke LP probleem:

$$
\begin{array}{lcrrrcl}
\text{maximaliseer } Z & = & 3x_1 & +2x_2 & -x_3 & & \\
\text{onder voorwaarden} & & 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 8 \\
 & & x_1 & +x_2 & & \leq & 10 \\
 & & -x_1 & -3x_2 & & \leq & -20 \\
 & & x_1, & x_2, & x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

$x_1 = 0$, $x_2 = 8$ en $x_3 = 0$ is optimale oplossing, met $Z = 16$.

Big-M methode

Wat is die M?

M staat voor extreem groot getal.

- We gebruiken opnieuw kunstmatige variabelen.
- Als we maximaliseren, dan tellen we $-Ma_i$ op bij doelstellingsfunctie voor elke kunstmatige variabele a_i.
- Omdat we maximaliseren, dwingen we zo af dat $a_i = 0$.

Als we minimaliseren, dan moeten we Ma_i optellen bij doelstellingsfunctie voor elke kunstmatige variabele a_i.

Terug naar voorbeeld (1)

$$
\begin{array}{llllllllll}
\max Z = & 3x_1 & +2x_2 & -x_3 & & & & & & \\
\text{onder} & 2x_1 & +x_2 & +x_3 & & & +a_1 & & = & 8 \\
 & x_1 & +x_2 & & +s_1 & & & & = & 10 \\
 & x_1 & +3x_2 & & & -s_2 & & +a_2 & = & 20 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & s_1, & s_2, & a_1, & a_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Tel $-Ma_i$ op bij doelstellingsfunctie voor elke kunstmatige variabele a_i:

$$
\begin{array}{llllllllll}
\max Z = & 3x_1 & +2x_2 & -x_3 & & & -Ma_1 & -Ma_2 & & \\
\text{onder} & 2x_1 & +x_2 & +x_3 & & & +a_1 & & = & 8 \\
 & x_1 & +x_2 & & +s_1 & & & & = & 10 \\
 & x_1 & +3x_2 & & & -s_2 & & +a_2 & = & 20 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & s_1, & s_2, & a_1, & a_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Terug naar voorbeeld (2)

Breng dit in Simplex tableau:

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	a_1	a_2	b
Z	1	-3	-2	1	0	0	M	M	0
a_1	0	2	1	1	0	0	1	0	8
s_1	0	1	1	0	1	0	0	0	10
a_2	0	1	3	0	0	-1	0	1	20

Dit is nog niet in juiste vorm.

Gereduceerde kostencoëfficiënten van a_1 en a_2 zijn ongelijk aan 0.

Terug naar voorbeeld (3)

Zorg door middel van rij operaties dat gereduceerde kostencoëfficiënten van basisvariabelen 0 worden.

Simplex tableau in juiste vorm is:

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	a_1	a_2	b
Z	1	$-3-3M$	$-2-4M$	$1-M$	0	M	0	0	$-28M$
a_1	0	2	1	1	0	0	1	0	8
s_1	0	1	1	0	1	0	0	0	10
a_2	0	1	3	0	0	-1	0	1	20

Gereduceerde kostencoëfficiënten van x_1, x_2 en x_3 zijn negatief, dus nog niet optimaal.

We nemen x_1 als intredende variabele.

Uittredende variabele wordt dan a_1.

Nieuwe basis is x_1, s_1, a_2.

Terug naar voorbeeld (4)

Nieuw Simplex tableau is:

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	a_1	a_2	b
Z	1	0	$-\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2}M$	$2\frac{1}{2} + \frac{1}{2}M$	0	M	$\frac{3}{2} + \frac{3}{2}M$	0	$12 - 16M$
x_1	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	4
s_1	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	6
a_2	0	0	$2\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	-1	$-\frac{1}{2}$	1	16

Gereduceerde kostencoëfficiënten van x_2 is negatief, dus nog niet optimaal.

We moeten x_2 als intredende variabele kiezen.

Dan wordt a_2 uittredende variabele.

Nieuwe basis is x_1, s_1, x_2.

Terug naar voorbeeld (5)

Nieuw Simplex tableau is:

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	a_1	a_2	b
Z	1	0	0	$2\frac{2}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	$1\frac{2}{5}+M$	$\frac{1}{5}+M$	$15\frac{1}{5}$
x_1	0	1	0	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$
s_1	0	0	0	$-\frac{2}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$2\frac{4}{5}$
x_2	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	0	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$6\frac{2}{5}$

Gereduceerde kostencoëfficiënt van s_2 is negatief, dus nog niet optimaal.

We moeten s_2 als intredende variabele kiezen.

Dan wordt x_1 uittredende variabele.

Nieuwe basis is s_1, x_2, s_2.

Terug naar voorbeeld (6)

Nieuw Simplex tableau is:

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	a_1	a_2	b
Z	1	1	0	3	0	0	$2+M$	M	16
s_2	0	5	0	3	0	1	3	-1	4
s_1	0	-1	0	-1	1	0	-1	0	2
x_2	0	2	1	1	0	0	1	0	8

Alle gereduceerde kostencoëfficiënten zijn niet-negatief, dus optimaal!

We lezen af dat $x_1 = 0$, $x_2 = 8$, $x_3 = 0$, $s_1 = 2$ en $s_2 = 4$ optimale basisoplossing is met $Z = 16$ van

$$
\begin{array}{llllllll}
\text{maximaliseer } Z & = & 3x_1 & +2x_2 & -x_3 & & & \\
\text{onder voorwaarden} & & 2x_1 & +x_2 & +x_3 & & & = 8 \\
& & x_1 & +x_2 & & +s_1 & & = 10 \\
& & x_1 & +3x_2 & & & -s_2 & = 20 \\
& & x_1, & x_2, & x_3, & s_1, & s_2 & \geq 0
\end{array}
$$

Terug naar voorbeeld (7)

Dus $x_1 = 0$, $x_2 = 8$ en $x_3 = 0$ is optimale oplossing met $Z = 16$ van oorspronkelijke probleem

$$
\begin{array}{lcrrrcl}
\text{maximaliseer } Z & = & 3x_1 & +2x_2 & -x_3 & & \\
\text{onder voorwaarden} & & 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 8 \\
 & & x_1 & +x_2 & & \leq & 10 \\
 & & -x_1 & -3x_2 & & \leq & -20 \\
 & & x_1, & x_2, & x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Samenvatting van vandaag

- Simplex methode voor oplossen van LP problemen met twee of meer beslissingsvariabelen
  - Vorige keer voor ‘eenvoudige’ LP problemen
  - Vandaag voor willekeurige LP problemen
    - 2-Fasen methode
    - Big-M methode
- We hebben voorbeelden gezien van LP problemen die onbegrensd zijn, die geen toegelaten oplossingen hebben, en die meerdere optimale oplossingen hebben

Instructies (vandaag, 10:45–12:30) in vier zalen:

Zaal	**voor studenten met achternaam beginnend**
Aud 10	met letters A tot en met D
Pav b2	met letters E tot en met K
Pav m23	met letters L tot en met R
Ipo 0.98	met letters S tot en met Z

Voor gedetailleerde informatie en college materiaal:

`www.win.tue.nl/~gwoegi/2DD50/OPT/`