TU/e 2DD50: Wiskunde 2

Enkele mededelingen

- Tussentoets: 26 november, tijdens de instructies
- Tentamenstof: LP; Simplex; dualiteit (= colleges 1–4)
- Bij de tussentoets mag een eenvoudige (niet programmeerbare) rekenmachine meegenomen worden, en 1 tweezijdig A4-tje met daarop handgeschreven aantekeningen die men nodig denkt te hebben bij het maken van de toets
- geen boeken, geen kopieën

$$\boxed{\text{November 19 and 26: Hoorcollege alleen in AUD 1}}$$

Voor gedetailleerde informatie en college materiaal:

`www.win.tue.nl/~gwoegi/2DD50/OPT/`

Waar waren we ook al weer gebleven?

Vorige keer

- Twee methoden om optimale oplossing te vinden voor willekeurige LP problemen
  - 2-Fasen methode
  - Big-M methode
- Voorbeelden van LP problemen die onbegrensd zijn, die geen toegelaten oplossingen hebben, en die meerdere optimale oplossingen hebben

Vandaag

- Bepalen van bovengrenzen voor LP problemen via ‘zwakke’ dualiteit
- Opstellen van duaal probleem voor willekeurige LP problemen

Ondergrens voor optimale waarde LP probleem

Beschouw LP probleem:

$$
\begin{array}{rcrrcr}
\text{maximaliseer } Z & = & 120x_1 & +80x_2 & & \\
\text{onder voorwaarden} & & x_1 & & \leq & 40 \\
 & & & x_2 & \leq & 10 \\
 & & 20x_1 & +10x_2 & \leq & 500 \\
 & & x_1, & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Merk op: $x_1 = 20$, $x_2 = 10$ is toegelaten oplossing,
dus ondergrens voor optimale waarde is $120 \cdot 20 + 80 \cdot 10 = 3200$.

Bovengrens voor optimale waarde LP probleem

$$
\begin{array}{rcrrcr}
\text{maximaliseer } Z & = & 120x_1 & +80x_2 & & \\
\text{onder voorwaarden} & & x_1 & & \leq & 40 \\
& & & x_2 & \leq & 10 \\
& & 20x_1 & +10x_2 & \leq & 500 \\
& & x_1, & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Bovengrens is bijvoorbeeld 5600, omdat

$$120x_1 + 80x_2 \leq 120 \cdot 40 + 80 \cdot 10 = 5600.$$

Dus optimale waarde is hoogstens 5600.

Betere bovengrens

$$\begin{array}{rcrrcr} \text{maximaliseer } Z & = & 120x_1 & +80x_2 & & \\ \text{onder voorwaarden} & & x_1 & & \leq & 40 \\ & & & x_2 & \leq & 10 \\ & & 20x_1 & +10x_2 & \leq & 500 \\ & & x_1, & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Betere bovengrens voor optimale waarde van dit LP probleem is 3200:

$$120x_1 + 80x_2 = 20x_2 + 6(20x_1 + 10x_2) \leq 20 \cdot 10 + 6 \cdot 500 = 3200.$$

In combinatie met eerdere ondergrens, concluderen we dat $3200 \leq Z^* \leq 3200 \Rightarrow Z^* = 3200$.

Hoe vinden we bovengrenzen?

Stel we nemen y_1, y_2, y_3 zodat

$$\begin{array}{ccccc} y_1 & & +20y_3 & \geq & 120 \\ & y_2 & +10y_3 & \geq & 80 \\ y_1, & y_2, & y_3 & \geq & 0 \end{array}$$

dan

$$\begin{aligned} 120x_1 + 80x_2 &\leq (y_1 + 20y_3)x_1 + (y_2 + 10y_3)x_2 \\ &= y_1x_1 + y_2x_2 + y_3(20x_1 + 10x_2) \\ &\leq 40y_1 + 10y_2 + 500y_3. \end{aligned}$$

Dus voor elke toegelaten oplossing x_1, x_2 en elke toegelaten oplossing y_1, y_2 , y_3 geldt:

$$120x_1 + 80x_2 \leq 40y_1 + 10y_2 + 500y_3.$$

Wat is scherpste (kleinst mogelijke) bovengrens?

We nemen $40y_1 + 10y_2 + 500y_3$ zo klein mogelijk, terwijl nog steeds wordt voldaan aan restricties:

$$
\begin{array}{lrrrrl}
\text{minimaliseer } W & = 40y_1 & +10y_2 & +500y_3 & & \\
\text{onder voorwaarden} & y_1 & & +20y_3 & \geq & 120 \\
 & & y_2 & +10y_3 & \geq & 80 \\
 & y_1, & y_2, & y_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Als W^* optimale waarde van bovenstaande LP probleem is, dan geldt:

$$Z^* \leq W^*.$$

Bovengrenzen via dualiteit (1)

Beschouw LP probleem

$$\begin{array}{llrrrr} \text{maximaliseer } Z & = & 120x_1 & +80x_2 & & \\ \text{onder voorwaarden} & & x_1 & & \leq & 40 \\ & & & x_2 & \leq & 10 \\ & & 20x_1 & +10x_2 & \leq & 500 \\ & & x_1, & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Beschouw verder LP probleem

$$\begin{array}{llrrrrr} \text{minimaliseer } W & = & 40y_1 & +10y_2 & +500y_3 & & \\ \text{onder voorwaarden} & & y_1 & & +20y_3 & \geq & 120 \\ & & & y_2 & +10y_3 & \geq & 80 \\ & & y_1, & y_2, & y_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Voor optimale waarden Z^* en W^* van deze twee problemen geldt:

$$Z^* \leq W^*.$$

Bovengrenzen via dualiteit (2)

Namelijk

$$y_1 + 20y_3 \geq 120, \qquad y_2 + 10y_3 \geq 80$$

en

$$x_1 \leq 40, \qquad x_2 \leq 10, \qquad 20x_1 + 10x_2 \leq 500$$

impliceert

$$\begin{aligned} 120x_1 + 80x_2 &\leq (y_1 + 20y_3)x_1 + (y_2 + 10y_3)x_2 \\ &= y_1x_1 + y_2x_2 + y_3(20x_1 + 10x_2) \\ &= x_1y_1 + x_2y_2 + (20x_1 + 10x_2)y_3 \\ &\leq 40y_1 + 10y_2 + 500y_3 \end{aligned}$$

Duale LP probleem (1)

Laten we nu het algemene principe bekijken.

LP probleem

$$\begin{array}{lll} \text{maximaliseer} & Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ \text{onder voorwaarden} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & \leq \quad b_i, \quad i = 1, \ldots, m \\ & x_j & \geq \quad 0 \end{array}$$

heeft duaal LP probleem

$$\begin{array}{lll} \text{minimaliseer} & W = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i & \\ \text{onder voorwaarden} & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i & \geq \quad c_j, \quad j = 1, \ldots, n \\ & y_i & \geq \quad 0 \end{array}$$

Oorspronkelijke LP probleem wordt ook wel primale LP probleem genoemd.

Duale LP probleem (2)

We kunnen ook matrix notatie gebruiken.

LP probleem

$$\begin{array}{lll} \text{maximaliseer} & Z = c^T x & \\ \text{onder voorwaarden} & Ax & \leq & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

heeft duaal LP probleem

$$\begin{array}{lll} \text{minimaliseer} & W = b^T y & \\ \text{onder voorwaarden} & A^T y & \geq & c \\ & y & \geq & 0 \end{array}$$

Oorspronkelijke LP probleem wordt ook wel primale LP probleem genoemd.

Duale LP probleem (3)

Om duale probleem op te stellen, moeten we primale LP probleem 'verticaal lezen':
coëfficiënten in kolommen (per variabele) van primale probleem worden coëfficiënten in rijen (per restrictie) in duale probleem.

Variabelen in duale probleem corresponderen met restricties in primale probleem.

Primale	Duale
kostencoëfficiënten	rechterzijde constanten
rechterzijde constanten	kostencoëfficiënten
i-de functionele restrictie	variabele y_i
variabele x_j	j-de functionele restrictie

Voorbeeld (1)

Beschouw (primale) LP probleem:

$$
\begin{array}{lrrrcl}
\text{maximaliseer } Z & = & 3x_1 & +5x_2 & & \\
\text{onder voorwaarden} & & x_1 & & \leq & 4 \\
 & & & 2x_2 & \leq & 12 \\
 & & 3x_1 & +2x_2 & \leq & 18 \\
 & & x_1, & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

- Doelstelling in duale probleem is minimaliseren.
- Primale LP probleem heeft 3 functionele restricties
  $\Rightarrow$ Duale probleem heeft 3 beslissingsvariabelen
- Primale probleem heeft 2 beslissingsvariabelen
  $\Rightarrow$ Duale probleem heeft 2 functionele restricties

Voorbeeld (2)

- Doelstelling in duale probleem is minimaliseren.
- Primale LP probleem heeft 3 functionele restricties
  $\Rightarrow$ Duale probleem heeft 3 beslissingsvariabelen
- Primale probleem heeft 2 beslissingsvariabelen
  $\Rightarrow$ Duale probleem heeft 2 functionele restricties

Duale probleem is:

$$
\begin{array}{rcrrrcl}
\text{minimaliseer } W & = & 4y_1 & +12y_2 & +18y_3 & & \\
\text{onder voorwaarden} & & y_1 & & +3y_3 & \geq & 3 \\
 & & & 2y_2 & +2y_3 & \geq & 5 \\
 & & y_1, & y_2, & y_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Zwakke dualiteitsstelling eenvoudige LP problemen (1)

Zwakke dualiteitsstelling

Voor elke toegelaten oplossing $x_1, \ldots, x_n$ van primale LP probleem en elke toegelaten oplossing $y_1, \ldots, y_m$ van duale probleem geldt:

$$c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \leq b_1y_1 + \cdots + b_my_m$$

Bewijs

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \geq c_j \text{ en } \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i$$

impliceert

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} c_jx_j &\leq \sum_{j=1}^{n}[\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i]x_j \\ &= \sum_{i=1}^{m}[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j]y_i \leq \sum_{i=1}^{m} b_iy_i \end{aligned}$$

Zwakke dualiteitsstelling eenvoudige LP problemen (2)

Zwakke dualiteitsstelling

Voor elke toegelaten oplossing $x_1, \ldots, x_n$ van primale LP probleem en elke toegelaten oplossing $y_1, \ldots, y_m$ van duale probleem geldt:

$$c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \leq b_1y_1 + \cdots + b_my_m$$

Consequenties

- Als primale probleem onbegrensd is, dan heeft duale probleem geen toegelaten oplossingen.
- Als duale probleem onbegrensd is, dan heeft primale probleem geen toegelaten oplossingen.

Voorbeeld

Beschouw (primale) LP probleem:

$$
\begin{array}{lcrrcl}
\text{maximaliseer } Z & = & x_1 & +x_2 & & \\
\text{onder voorwaarden} & & -x_1 & +2x_2 & \leq & 1 \\
 & & & x_2 & \leq & 1 \\
 & & x_1, & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Dit probleem is onbegrensd: x_1 kan willekeurig groot zijn.

Duale probleem is:

$$
\begin{array}{lcrrcl}
\text{minimaliseer } W & = & y_1 & +y_2 & & \\
\text{onder voorwaarden} & & -y_1 & & \geq & 1 \\
 & & 2y_1 & +y_2 & \geq & 1 \\
 & & y_1, & y_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Dit probleem heeft geen toegelaten oplossingen: tegenstrijdige voorwaarden voor y_1.

Duale van willekeurige LP problemen (1)

Niet-positiviteitsrestricties

Wat is duale probleem van volgende LP probleem?

$$
\begin{array}{llllll}
\text{maximaliseer } Z & = & 5x_1 & +6x_2 & & \\
\text{onder voorwaarden} & & x_1 & +x_2 & \leq & 3 \\
 & & 2x_1 & -4x_2 & \leq & 5 \\
 & & x_1, & x_2 & \leq & 0 \quad \leftarrow \text{let op!}
\end{array}
$$

Substitutie van $x_1' = -x_1$ en $x_2' = -x_2$ geeft:

$$
\begin{array}{llllll}
\text{maximaliseer } Z & = & -5x_1' & -6x_2' & & \\
\text{onder voorwaarden} & & -x_1' & -x_2' & \leq & 3 \\
 & & -2x_1' & +4x_2' & \leq & 5 \\
 & & x_1', & x_2' & \geq & 0
\end{array}
$$

Duale van willekeurige LP problemen (2)

$$
\begin{array}{llrrcr}
\text{maximaliseer } Z & = & -5x_1' & -6x_2' & & \\
\text{onder voorwaarden} & & -x_1' & -x_2' & \leq & 3 \\
 & & -2x_1' & +4x_2' & \leq & 5 \\
 & & x_1', & x_2' & \geq & 0
\end{array}
$$

Het duale van bovenstaande probleem is:

$$
\begin{array}{llrrcr}
\text{minimaliseer } W & = & 3y_1 & +5y_2 & & \\
\text{onder voorwaarden} & & -y_1 & -2y_2 & \geq & -5 \\
 & & -y_1 & +4y_2 & \geq & -6 \\
 & & y_1, & y_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Duale van willekeurige LP problemen (3)

$$\begin{array}{llrrcr} \text{minimaliseer } W & = & 3y_1 & +5y_2 & & \\ \text{onder voorwaarden} & & -y_1 & -2y_2 & \geq & -5 \\ & & -y_1 & +4y_2 & \geq & -6 \\ & & y_1, & y_2 & \geq & 0 \end{array}$$

We kunnen dit herschrijven als:

$$\begin{array}{llrrcr} \text{minimaliseer } W & = & 3y_1 & +5y_2 & & \\ \text{onder voorwaarden} & & y_1 & +2y_2 & \leq & 5 \\ & & y_1 & -4y_2 & \leq & 6 \\ & & y_1, & y_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Duale van willekeurige LP problemen (4)

Dus primale LP probleem

$$\begin{array}{lrrrcl} \text{maximaliseer } Z & = & 5x_1 & +6x_2 & & \\ \text{onder voorwaarden} & & x_1 & +x_2 & \leq & 3 \\ & & 2x_1 & -4x_2 & \leq & 5 \\ & & x_1, & x_2 & \leq & 0 \end{array}$$

heeft als duale probleem:

$$\begin{array}{lrrrcl} \text{minimaliseer } W & = & 3y_1 & +5y_2 & & \\ \text{onder voorwaarden} & & y_1 & +2y_2 & \leq & 5 \\ & & y_1 & -4y_2 & \leq & 6 \\ & & y_1, & y_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Conclusie Als doelstelling maximaliseren is, dan geeft variabele $x_i \leq 0$ in duale probleem $\leq$-functionele restrictie.

Duale van willekeurige LP problemen (5)

Vrije variabelen

Wat is duale probleem van volgende LP probleem?

$$
\begin{array}{lcrrcl}
\text{maximaliseer } Z & = & 5x_1 & +6x_2 & & \\
\text{onder voorwaarden} & & x_1 & +x_2 & \leq & 3 \\
 & & 2x_1 & -4x_2 & \leq & 5
\end{array}
$$

$\leftarrow$ let op: vrije variabelen!

Substitutie van $x_1 = x_1' - x_1''$ en $x_2 = x_2' - x_2''$ geeft

$$
\begin{array}{lcrrrrcl}
\text{maximaliseer } Z & = & 5x_1' & -5x_1'' & +6x_2' & -6x_2'' & & \\
\text{onder voorwaarden} & & x_1' & -x_1'' & +x_2' & -x_2'' & \leq & 3 \\
 & & 2x_1' & -2x_1'' & -4x_2' & +4x_2'' & \leq & 5 \\
 & & x_1', & x_1'', & x_2', & x_2'' & \geq & 0
\end{array}
$$

Duale van willekeurige LP problemen (6)

$$
\begin{array}{llrrrrrr}
\text{maximaliseer } Z & = & 5x_1' & -5x_1'' & +6x_2' & -6x_2'' & & \\
\text{onder voorwaarden} & & x_1' & -x_1'' & +x_2' & -x_2'' & \leq & 3 \\
 & & 2x_1' & -2x_1'' & -4x_2' & +4x_2'' & \leq & 5 \\
 & & x_1', & x_1'', & x_2', & x_2'' & \geq & 0
\end{array}
$$

Het duale van bovenstaande probleem is:

$$
\begin{array}{llrrrr}
\text{minimaliseer } W & = & 3y_1 & +5y_2 & & \\
\text{onder voorwaarden} & & y_1 & +2y_2 & \geq & 5 \\
 & & -y_1 & -2y_2 & \geq & -5 \\
 & & y_1 & -4y_2 & \geq & 6 \\
 & & -y_1 & +4y_2 & \geq & -6 \\
 & & y_1, & y_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Duale van willekeurige LP problemen (7)

$$\begin{array}{llrrcr}
\text{minimaliseer } W & = & 3y_1 & +5y_2 & & \\
\text{onder voorwaarden} & & y_1 & +2y_2 & \geq & 5 \\
 & & -y_1 & -2y_2 & \geq & -5 \\
 & & y_1 & -4y_2 & \geq & 6 \\
 & & -y_1 & +4y_2 & \geq & -6 \\
 & & y_1, & y_2 & \geq & 0
\end{array}$$

We kunnen dit herschrijven als:

$$\begin{array}{llrrcr}
\text{minimaliseer } W & = & 3y_1 & +5y_2 & & \\
\text{onder voorwaarden} & & y_1 & +2y_2 & = & 5 \\
 & & y_1 & -4y_2 & = & 6 \\
 & & y_1, & y_2 & \geq & 0
\end{array}$$

Duale van willekeurige LP problemen (8)

Dus primale LP probleem

$$\begin{array}{lcrrcr} \text{maximaliseer } Z & = & 5x_1 & +6x_2 & & \\ \text{onder voorwaarden} & & x_1 & +x_2 & \leq & 3 \\ & & 2x_1 & -4x_2 & \leq & 5 \end{array}$$

heeft als duale probleem:

$$\begin{array}{lcrrcr} \text{minimaliseer } W & = & 3y_1 & +5y_2 & & \\ \text{onder voorwaarden} & & y_1 & +2y_2 & = & 5 \\ & & y_1 & -4y_2 & = & 6 \\ & & y_1, & y_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Conclusie Als doelstelling maximaliseren is, dan geeft vrije variabele x_i in duale probleem $=$-functionele restrictie.

Duale van willekeurige LP problemen (9)

$=$-functionele restricties

Wat is duale probleem van volgende LP probleem?

$$\begin{array}{llllll}
\text{maximaliseer } Z & = & 5x_1 & +6x_2 & & \\
\text{onder voorwaarden} & & x_1 & +x_2 & \leq & 3 \\
 & & 2x_1 & -4x_2 & = & 5 \\
 & & x_1, & x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

Als we gelijkheidsrestrictie $2x_1 - 4x_2 = 5$ vervangen door

$$\begin{array}{rcl}
2x_1 - 4x_2 & \leq & 5 \\
-2x_1 + 4x_2 & \leq & -5
\end{array}$$

dan verkrijgen we:

$$\begin{array}{llllll}
\text{maximaliseer } Z & = & 5x_1 & +6x_2 & & \\
\text{onder voorwaarden} & & x_1 & +x_2 & \leq & 3 \\
 & & 2x_1 & -4x_2 & \leq & 5 \\
 & & -2x_1 & +4x_2 & \leq & -5
\end{array}$$

Duale van willekeurige LP problemen (10)

$$
\begin{array}{llllll}
\text{maximaliseer } Z & = & 5x_1 & +6x_2 & & \\
\text{onder voorwaarden} & & x_1 & +x_2 & \leq & 3 \\
 & & 2x_1 & -4x_2 & \leq & 5 \\
 & & -2x_1 & +4x_2 & \leq & -5 \\
 & & x_1, & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Het duale van bovenstaande probleem is:

$$
\begin{array}{lllllll}
\text{minimaliseer } W & = & 3y_1 & +5y_2' & -5y_2'' & & \\
\text{onder voorwaarden} & & y_1 & +2y_2' & -2y_2'' & \geq & 5 \\
 & & y_1 & -4y_2' & +4y_2'' & \geq & 6 \\
 & & y_1, & y_2', & y_2'' & \geq & 0
\end{array}
$$

Duale van willekeurige LP problemen (11)

$$
\begin{array}{llllllll}
\text{minimaliseer } W & = & 3y_1 & +5y_2' & -5y_2'' & & \\
\text{onder voorwaarden} & & y_1 & +2y_2' & -2y_2'' & \geq & 5 \\
 & & y_1 & -4y_2' & +4y_2'' & \geq & 6 \\
 & & y_1, & y_2', & y_2'' & \geq & 0
\end{array}
$$

We kunnen dit herschrijven als:

$$
\begin{array}{llllll}
\text{minimaliseer } W & = & 3y_1 & +5y_2 & & \\
\text{onder voorwaarden} & & y_1 & +2y_2 & \geq & 5 \\
 & & y_1 & -4y_2 & \geq & 6 \\
 & & y_1 & & \geq & 0
\end{array}
$$

Duale van willekeurige LP problemen (12)

Dus primale LP probleem

$$\begin{array}{lccccc} \text{maximaliseer } Z & = & 5x_1 & +6x_2 & & \\ \text{onder voorwaarden} & & x_1 & +x_2 & \leq & 3 \\ & & 2x_1 & -4x_2 & = & 5 \\ & & x_1, & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

heeft als duale probleem:

$$\begin{array}{lccccc} \text{minimaliseer } W & = & 3y_1 & +5y_2 & & \\ \text{onder voorwaarden} & & y_1 & +2y_2 & \geq & 5 \\ & & y_1 & -4y_2 & \geq & 6 \\ & & y_1 & & \geq & 0 \end{array}$$

Conclusie Als doelstelling maximaliseren is, dan geeft $=$-functionele restrictie in duale probleem vrije variabele.

Duale van willekeurige LP problemen (13)

Doelstelling is minimaliseren

Wat is duale probleem van volgende LP probleem?

$$
\begin{array}{llllll}
\text{minimaliseer} & 5x_1 & +6x_2 & & \\
\text{onder voorwaarden} & x_1 & +x_2 & \leq & 3 \\
 & 2x_1 & -4x_2 & \leq & 5 \\
 & x_1, & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

We kunnen dit herschrijven als:

$$
\begin{array}{llllll}
\text{maximaliseer} & -5x_1 & -6x_2 & & \\
\text{onder voorwaarden} & x_1 & +x_2 & \leq & 3 \\
 & 2x_1 & -4x_2 & \leq & 5 \\
 & x_1, & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Duale van willekeurige LP problemen (14)

$$\begin{array}{llllll} \text{maximaliseer} & -5x_1 & -6x_2 & & \\ \text{onder voorwaarden} & x_1 & +x_2 & \leq & 3 \\ & 2x_1 & -4x_2 & \leq & 5 \\ & x_1, & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Het duale van bovenstaande probleem is:

$$\begin{array}{llllll} \text{minimaliseer} & 3y_1' & +5y_2' & & \\ \text{onder voorwaarden} & y_1' & +2y_2' & \geq & -5 \\ & y_1' & -4y_2' & \geq & -6 \\ & y_1', & y_2' & \geq & 0 \end{array}$$

Duale van willekeurige LP problemen (15)

$$\begin{array}{llllll}
\text{minimaliseer} & 3y'_1 & +5y'_2 & & \\
\text{onder voorwaarden} & y'_1 & +2y'_2 & \geq & -5 \\
 & y'_1 & -4y'_2 & \geq & -6 \\
 & y'_1, & y'_2 & \geq & 0
\end{array}$$

We kunnen dit herschrijven als:

$$\begin{array}{llllll}
\text{minimaliseer} & 3y'_1 & +5y'_2 & & \\
\text{onder voorwaarden} & -y'_1 & -2y'_2 & \leq & 5 \\
 & -y'_1 & +4y'_2 & \leq & 6 \\
 & y'_1, & y'_2 & \geq & 0
\end{array}$$

Duale van willekeurige LP problemen (16)

$$\begin{array}{lrrcr} \text{minimaliseer} & 3y_1' & +5y_2' & & \\ \text{onder voorwaarden} & -y_1' & -2y_2' & \leq & 5 \\ & -y_1' & +4y_2' & \leq & 6 \\ & y_1', & y_2' & \geq & 0 \end{array}$$

Substitutie $y_1 = -y_1'$ en $y_2 = -y_2'$ geeft

$$\begin{array}{lrrcr} \text{minimaliseer} & -3y_1 & -5y_2 & & \\ \text{onder voorwaarden} & y_1 & +2y_2 & \leq & 5 \\ & y_1 & -4y_2 & \leq & 6 \\ & y_1, & y_2 & \leq & 0 \end{array}$$

Duale van willekeurige LP problemen (17)

$$\begin{array}{lllll} \text{minimaliseer} & -3y_1 & -5y_2 & & \\ \text{onder voorwaarden} & y_1 & +2y_2 & \leq & 5 \\ & y_1 & -4y_2 & \leq & 6 \\ & y_1, & y_2 & \leq & 0 \end{array}$$

We kunnen dit herschrijven als:

$$\begin{array}{lllll} \text{maximaliseer} & 3y_1 & +5y_2 & & \\ \text{onder voorwaarden} & y_1 & +2y_2 & \leq & 5 \\ & y_1 & -4y_2 & \leq & 6 \\ & y_1, & y_2 & \leq & 0 \end{array}$$

Duale van willekeurige LP problemen (18)

Dus primale LP probleem

$$\begin{array}{llllll} \text{minimaliseer} & 5x_1 & +6x_2 & & \\ \text{onder voorwaarden} & x_1 & +x_2 & \leq & 3 \\ & 2x_1 & -4x_2 & \leq & 5 \\ & x_1, & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

heeft als duale probleem:

$$\begin{array}{llllll} \text{maximaliseer} & 3y_1 & +5y_2 & & \\ \text{onder voorwaarden} & y_1 & +2y_2 & \leq & 5 \\ & y_1 & -4y_2 & \leq & 6 \\ & y_1, & y_2 & \leq & 0 \end{array}$$

Conclusie Als doelstelling minimaliseren is, dan geven $\leq$-functionele restricties in duale probleem niet-positiviteitsrestricties $y_i \leq 0$, en niet-negativiteits restricties $x_j \geq 0$ geven in duale probleem $\leq$-functionele restricties.

Duale van willekeurige LP problemen (19)

Hoe vinden we duale probleem van willekeurig LP probleem?

Welke regels gelden in het algemeen?

Duale van willekeurige LP problemen (20)

	Primale	Duale	
	maximaliseer Z	minimaliseer W	
i-de functionele restrictie	$\leq$	variabele y_i	≥ 0
	$=$		vrij
	$\geq$		≤ 0
variabele x_j	≥ 0	j-de functionele restrictie	$\geq$
	vrij		$=$
	≤ 0		$\leq$

Duale van willekeurige LP problemen (21)

	Duale	Primale	
	maximaliseer Z	minimaliseer W	
i-de functionele restrictie	$\leq$	variabele x_i	≥ 0
	$=$		vrij
	$\geq$		≤ 0
variabele y_j	≥ 0	j-de functionele restrictie	$\geq$
	vrij		$=$
	≤ 0		$\leq$

Duale van willekeurige LP problemen (22)

Wat krijgen we als we het duale van het duale nemen?

Duale probleem van duale probleem is weer primale LP probleem!

Samenvatting van vandaag

- Bepalen van bovengrenzen via ‘zwakke’ dualiteit voor willekeurige LP problemen
- Volgende keer: ‘sterke’ dualiteit