TU/e 2DD50: Wiskunde 2 (1)

Enkele mededelingen

Instructies (vandaag, 10:45–12:30) in vier zalen:

Zaal	**voor studenten met achternaam beginnend**
Aud 10	met letters A tot en met D
Pav b2	met letters E tot en met K
Pav m23	met letters L tot en met R
Ipo 0.98	met letters S tot en met Z

Voor gedetailleerde informatie en college materiaal:

`www.win.tue.nl/~gwoegi/2DD50/OPT/`

2DD50: Wiskunde 2 (2)

Tussentoets

- 26 november, tijdens de instructies
- **Zaal:** paviljoen study hub
- **Time:** 90min

- Tentamenstof: colleges 1–4
  (LP; Simplex; dualiteit; complementaire slackness)
- Oude tentamens:
  `www.win.tue.nl/~gwoegi/2DD50/OPT/tentamen.html`

2DD50: Wiskunde 2 (3)

Tussentoets

- Bij de tussentoets mag een eenvoudige (niet programmeerbare) rekenmachine meegenomen worden, en 1 tweezijdig A4-tje met daarop handgeschreven aantekeningen die men nodig denkt te hebben bij het maken van de toets
- geen boeken, geen kopieën

- Als een antwoord twee verschillende oplossingen bevat dan krijg je nul punten.
- Als een langere berekening (zoals toepassen van de simplexmethode of het oplossen van een transportprobleem) een fout bevat, dan krijg je alleen punten voor het deel voorafgaand aan de fout.

Waar waren we ook al weer gebleven?

Vorige keer

- Bepalen van bovengrenzen voor willekeurige LP problemen via ‘zwakke’ dualiteit

Vandaag

- ‘Sterke’ dualiteit
- Complementaire slackness

Duale LP probleem (1)

LP probleem

$$\begin{array}{lll} \text{maximaliseer} & Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ \text{onder voorwaarden} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, & i = 1, \ldots, m \\ & x_j \geq 0 & \end{array}$$

heeft duaal LP probleem

$$\begin{array}{lll} \text{minimaliseer} & W = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i & \\ \text{onder voorwaarden} & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j, & j = 1, \ldots, n \\ & y_i \geq 0 & \end{array}$$

Oorspronkelijke LP probleem wordt ook wel primale LP probleem genoemd.

Duale LP probleem (2)

We kunnen ook matrix notatie gebruiken.

LP probleem

$$
\begin{array}{lll}
\text{maximaliseer} & Z = c^T x & \\
\text{onder voorwaarden} & Ax & \leq \; b \\
 & x & \geq \; 0
\end{array}
$$

heeft duaal LP probleem

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimaliseer} & W = b^T y & \\
\text{onder voorwaarden} & A^T y & \geq \; c \\
 & y & \geq \; 0
\end{array}
$$

Oorspronkelijke LP probleem wordt ook wel primale LP probleem genoemd.

Duale LP probleem (3)

Om duale probleem op te stellen, moeten we primale LP probleem ‘verticaal lezen’:
coëfficiënten in kolommen (per variabele) van primale probleem worden coëfficiënten in rijen (per restrictie) van duale probleem.

Variabelen in duale probleem corresponderen met restricties in primale probleem.

Primale	Duale
kostencoëfficiënten	rechterzijde constanten
rechterzijde constanten	kostencoëfficiënten
i-de functionele restrictie	variabele y_i
variabele x_j	j-de functionele restrictie

Zwakke dualiteitsstelling eenvoudige LP problemen

Zwakke dualiteitsstelling

Voor elke toegelaten oplossing $x_1, \ldots, x_n$ van primale LP probleem en elke toegelaten oplossing $y_1, \ldots, y_m$ van duale probleem geldt:

$$c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n \leq b_1 y_1 + \cdots + b_m y_m$$

Consequenties

- Als primale probleem onbegrensd is, dan heeft duale probleem geen toegelaten oplossingen.
- Als duale probleem onbegrensd is, dan heeft primale probleem geen toegelaten oplossingen.

Sterke dualiteitsstelling

Als zowel primale als duale LP probleem toegelaten oplossingen hebben, dan hebben ze optimale oplossingen.

- Z^* is optimale waarde van primale probleem
- W^* is optimale waarde van duale probleem

Sterke dualiteitsstelling

Voor optimale waarden van primale en duale problemen geldt:

$$Z^* = W^*$$

Waarom?

Hiervoor gaan we terug naar Simplex tableau...

Terug naar Simplex tableau (1)

Optimale oplossing voor duale probleem kan worden afgelezen van Simplex tableau van primale probleem.

Beschouw (primale) LP probleem:

$$\begin{array}{lcrrcl}
\text{maximaliseer } Z & = & 120x_1 & +80x_2 & & \\
\text{onder voorwaarden} & & x_1 & & \leq & 40 \\
& & & x_2 & \leq & 10 \\
& & 20x_1 & +10x_2 & \leq & 500 \\
& & x_1, & x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

Duale LP probleem is:

$$\begin{array}{lclllcl}
\text{minimaliseer } W & = & 40y_1 & +10y_2 & +500y_3 & & \\
\text{onder voorwaarden} & & y_1 & & +20y_3 & \geq & 120 \\
& & & y_2 & +10y_3 & \geq & 80 \\
& & y_1, & y_2, & y_3 & \geq & 0
\end{array}$$

Terug naar Simplex tableau (2)

Initiële Simplex tableau voor primale probleem is:

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
Z	1	-120	-80	0	0	0	0
s_1	0	1	0	1	0	0	40
s_2	0	0	1	0	1	0	10
s_3	0	20	10	0	0	1	500

Optimale Simplex tableau is:

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	0	0	0	20	6	3200
s_1	0	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{20}$	20
x_2	0	0	1	0	1	0	10
x_1	0	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{20}$	20

Merk op: alle gereduceerde kostencoëfficiënten zijn niet negatief.

Terug naar Simplex tableau (3)

Optimale Simplex tableau is:

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	0	0	0	20	6	3200
s_1	0	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{20}$	20
x_2	0	0	1	0	1	0	10
x_1	0	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{20}$	20

Optimale oplossing voor duale probleem kan worden afgelezen als gereduceerde kostencoëfficiënten onder slack variabelen.

Dus $y_1 = 0$, $y_2 = 20$, $y_3 = 6$ is optimale oplossing voor duale probleem.

Waarom?

Terug naar Simplex tableau (4)

Simplex tableau is als matrix op te vatten.

Stel Simplex tableau is:

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	-3	-5	0	0	0	0
s_1	0	1	0	1	0	0	4
s_2	0	0	2	0	1	0	12
s_3	0	3	2	0	0	1	18

Bijbehorende matrix is:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 18 \end{bmatrix}$$

Terug naar Simplex tableau (5)

Rij operaties

- Simplex methode voert feitelijk telkens rij operaties uit.
- Rij operaties op matrix corresponderen met voorvermenigvuldiging met bepaalde matrix.

Terug naar Simplex tableau (6)

Stel initiële Simplex tableau is:

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	-3	-5	0	0	0	0
s_1	0	1	0	1	0	0	4
s_2	0	0	2	0	1	0	12
s_3	0	3	2	0	0	1	18

Optimale Simplex tableau is:

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	0	0	0	$1\frac{1}{2}$	1	36
s_1	0	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2
x_2	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
x_1	0	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2

Terug naar Simplex tableau (7)

Matrix behorende bij initiële Simplex tableau is:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & \text{-5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 18 \end{bmatrix}$$

Matrix behorende bij optimale Simplex tableau is:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1\frac{1}{2} & 1 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 2 \end{bmatrix}$$

Terug naar Simplex tableau (8)

- Rij operaties op matrix corresponderen met voorvermenigvuldiging met bepaalde matrix.
- Er bestaat dus vierkante matrix M zodat:

$$M \begin{bmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1\frac{1}{2} & 1 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 2 \end{bmatrix}$$

Wat is die matrix M?

Terug naar Simplex tableau (9)

$$M \left[\begin{array}{c|cc|ccc|c} 1 & -3 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 18 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|cc|ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1\frac{1}{2} & 1 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 2 \end{array}\right]$$

Terug naar Simplex tableau (9)

$$M \left[\begin{array}{c|cc|ccc|c} 1 & -3 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 18 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|cc|ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1\frac{1}{2} & 1 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 2 \end{array}\right]$$

Uit eerste kolom zien we dat:

$$M \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Terug naar Simplex tableau (9)

$$M\left[\begin{array}{c|cc|ccc|c} 1 & -3 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 18 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|cc|ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1\frac{1}{2} & 1 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 2 \end{array}\right]$$

Uit vierde kolom zien we dat:

$$M\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Terug naar Simplex tableau (9)

$$M \left[\begin{array}{c|cc|ccc|c} 1 & -3 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 18 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|cc|ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1\frac{1}{2} & 1 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 2 \end{array}\right]$$

Uit vijfde kolom zien we dat:

$$M \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Terug naar Simplex tableau (9)

$$M\left[\begin{array}{c|cc|ccc|c} 1 & -3 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 18 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|cc|ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1\frac{1}{2} & 1 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 2 \end{array}\right]$$

Uit zesde kolom zien we dat:

$$M\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Terug naar Simplex tableau (9)

$$M\left[\begin{array}{c|cc|ccc|c} 1 & -3 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 18 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|cc|ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1\frac{1}{2} & 1 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 2 \end{array}\right]$$

Samenvattend:

$$M\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Observatie: als we i-de eenheidsvector voorvermenigvuldigen met matrix M, dan krijgen we i-de kolom van matrix M.

Terug naar Simplex tableau (9)

$$M\left[\begin{array}{c|cc|ccc|c} 1 & -3 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 18 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|cc|ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1\frac{1}{2} & 1 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 2 \end{array}\right]$$

Concluderend:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Terug naar Simplex tableau (9)

$$M \left[\begin{array}{c|cc|ccc|c} 1 & -3 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 18 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|cc|ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1\frac{1}{2} & 1 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 2 \end{array}\right]$$

Concluderend:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Matrix M kan worden afgelezen van optimale Simplex tableau als matrix onder Z en slack variabelen.

Terug naar Simplex tableau (9)

Stel initiële Simplex tableau is:

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	-3	-5	0	0	0	0
s_1	0	1	0	1	0	0	4
s_2	0	0	2	0	1	0	12
s_3	0	3	2	0	0	1	18

Optimale Simplex tableau is:

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	0	0	0	$1\frac{1}{2}$	1	?
s_1	0	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	?
x_2	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	?
x_1	0	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	?

Wat staat in kolom van b?

Terug naar Simplex tableau (10)

Zojuist zagen we dat:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

In kolom van b komt te staan:

$$M \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 \\ 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Optimale oplossing voor duale probleem (1)

Gereduceerde kostencoëfficiënten van slack variabelen vormen optimale oplossing voor duale probleem.

Beschouw (primale) LP probleem:

$$
\begin{array}{lcccccc}
\text{maximaliseer } Z & = & 3x_1 & +5x_2 & & \\
\text{onder voorwaarden} & & x_1 & & \leq & 4 \\
& & & 2x_2 & \leq & 12 \\
& & 3x_1 & +2x_2 & \leq & 18 \\
& & x_1, & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Duale probleem is:

$$
\begin{array}{lccccccc}
\text{minimaliseer } W & = & 4y_1 & +12y_2 & +18y_3 & & \\
\text{onder voorwaarden} & & y_1 & & +3y_3 & \geq & 3 \\
& & & 2y_2 & +2y_3 & \geq & 5 \\
& & y_1, & y_2, & y_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Optimale oplossing voor duale probleem (1)

Gereduceerde kostencoëfficiënten van slack variabelen vormen optimale oplossing voor duale probleem.

Beschouw (primale) LP probleem:

$$
\begin{array}{llrrrl}
\text{maximaliseer } Z & = & 3x_1 & +5x_2 & & \\
\text{onder voorwaarden} & & x_1 & & \leq & 4 \\
 & & & 2x_2 & \leq & 12 \\
 & & 3x_1 & +2x_2 & \leq & 18 \\
 & & x_1, & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Optimale Simplex tableau is:

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	0	0	0	$1\frac{1}{2}$	1	36
s_1	0	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2
x_2	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
x_1	0	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2

Optimale oplossing voor duale probleem (1)

Gereduceerde kostencoëfficiënten van slack variabelen vormen optimale oplossing voor duale probleem.

Beschouw (primale) LP probleem:

$$
\begin{array}{lcrrcr}
\text{maximaliseer } Z & = & 3x_1 & +5x_2 & & \\
\text{onder voorwaarden} & & x_1 & & \leq & 4 \\
& & & 2x_2 & \leq & 12 \\
& & 3x_1 & +2x_2 & \leq & 18 \\
& & x_1, & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Optimale oplossing voor duale probleem:

$$
\begin{array}{lcrrrcr}
\text{minimaliseer } W & = & 4y_1 & +12y_2 & +18y_3 & & \\
\text{onder voorwaarden} & & y_1 & & +3y_3 & \geq & 3 \\
& & & 2y_2 & +2y_3 & \geq & 5 \\
& & y_1, & y_2, & y_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

is $y_1 = 0,\ y_2 = 1\frac{1}{2},\ y_3 = 1$.

Optimale oplossing voor duale probleem (1)

Gereduceerde kostencoëfficiënten van slack variabelen vormen optimale oplossing voor duale probleem.

Beschouw (primale) LP probleem:

$$
\begin{array}{lrrrll}
\text{maximaliseer } Z & = & 3x_1 & +5x_2 & & \\
\text{onder voorwaarden} & & x_1 & & \leq & 4 \\
 & & & 2x_2 & \leq & 12 \\
 & & 3x_1 & +2x_2 & \leq & 18 \\
 & & x_1, & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Optimale oplossing voor duale probleem:

$$
\begin{array}{lrrrrll}
\text{minimaliseer } W & = & 4y_1 & +12y_2 & +18y_3 & & \\
\text{onder voorwaarden} & & y_1 & & +3y_3 & \geq & 3 \\
 & & & 2y_2 & +2y_3 & \geq & 5 \\
 & & y_1, & y_2, & y_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

is $y_1 = 0$, $y_2 = 1\frac{1}{2}$, $y_3 = 1$.

Waarom?

Optimale oplossing voor duale probleem (2)

Gereduceerde kostencoëfficiënten van slack variabelen vormen optimale oplossing voor duale probleem.

- We gaan eerst aantonen dat gereduceerde kostencoëfficiënten van slack variabelen toegelaten oplossing vormen voor duale probleem.
- Vervolgens laten we zien dat deze oplossing optimaal is.

Optimale oplossing voor duale probleem (3)

Matrix M is:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & y_1 & y_2 & y_3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Optimale oplossing voor duale probleem (3)

Matrix M is:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & y_1 & y_2 & y_3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Matrix van initiële Simplex tableau is:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 18 \end{bmatrix}$$

Matrix van optimale Simplex tableau is:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1\frac{1}{2} & 1 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 2 \end{bmatrix}$$

Optimale oplossing voor duale probleem (3)

Matrix M is:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & y_1 & y_2 & y_3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Uit tweede kolom zien we dat:

$$\begin{bmatrix} 1 & y_1 & y_2 & y_3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 + y_1 + 3y_3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Optimale oplossing voor duale probleem (3)

Matrix M is:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & y_1 & y_2 & y_3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Uit tweede kolom zien we dat:

$$\begin{bmatrix} 1 & y_1 & y_2 & y_3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 + y_1 + 3y_3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Getal in eerste rij en tweede kolom van Simplex tableau is gereduceerde kostencoëfficiënt van x_1:
groter dan of gelijk aan 0 (wegens optimaliteit).

Optimale oplossing voor duale probleem (3)

Matrix M is:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & y_1 & y_2 & y_3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Uit tweede kolom zien we dat:

$$\begin{bmatrix} 1 & y_1 & y_2 & y_3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 + y_1 + 3y_3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$-3 + y_1 + 3y_3 \geq 0.$$

Optimale oplossing voor duale probleem (3)

Matrix M is:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & y_1 & y_2 & y_3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Uit tweede kolom zien we dat:

$$\begin{bmatrix} 1 & y_1 & y_2 & y_3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 + y_1 + 3y_3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y_1 + 3y_3 \geq 3$$

Optimale oplossing voor duale probleem (3)

Matrix M is:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & y_1 & y_2 & y_3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Uit tweede kolom zien we dat:

$$\begin{bmatrix} 1 & y_1 & y_2 & y_3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 + y_1 + 3y_3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

y_1, y_2, y_3 voldoet aan eerste restrictie van duale probleem.

Optimale oplossing voor duale probleem (4)

Matrix M is:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & y_1 & y_2 & y_3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Optimale oplossing voor duale probleem (4)

Matrix M is:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & y_1 & y_2 & y_3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Matrix van initiële Simplex tableau is:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 18 \end{bmatrix}$$

Matrix van optimale Simplex tableau is:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1\frac{1}{2} & 1 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 2 \end{bmatrix}$$

Optimale oplossing voor duale probleem (4)

Matrix M is:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & y_1 & y_2 & y_3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Uit derde kolom zien we dat:

$$\begin{bmatrix} 1 & y_1 & y_2 & y_3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 + 2y_2 + 2y_3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Optimale oplossing voor duale probleem (4)

Matrix M is:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & y_1 & y_2 & y_3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Uit derde kolom zien we dat:

$$\begin{bmatrix} 1 & y_1 & y_2 & y_3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 + 2y_2 + 2y_3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Getal in eerste rij en derde kolom van Simplex tableau is gereduceerde kostencoëfficiënt van x_2:
groter dan of gelijk aan 0 (wegens optimaliteit).

Optimale oplossing voor duale probleem (4)

Matrix M is:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & y_1 & y_2 & y_3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Uit derde kolom zien we dat:

$$\begin{bmatrix} 1 & y_1 & y_2 & y_3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 + 2y_2 + 2y_3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-5 + 2y_2 + 2y_3 \geq 0.$$

Optimale oplossing voor duale probleem (4)

Matrix M is:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & y_1 & y_2 & y_3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Uit derde kolom zien we dat:

$$\begin{bmatrix} 1 & y_1 & y_2 & y_3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 + 2y_2 + 2y_3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$2y_2 + 2y_3 \geq 5$$

Optimale oplossing voor duale probleem (4)

Matrix M is:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & y_1 & y_2 & y_3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Uit derde kolom zien we dat:

$$\begin{bmatrix} 1 & y_1 & y_2 & y_3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 + 2y_2 + 2y_3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y_1, y_2, y_3 voldoet aan tweede restrictie van duale probleem.

Optimale oplossing voor duale probleem (5)

We gaan nu laten zien dat gereduceerde kostencoëfficiënten van slack variabelen niet alleen toegelaten oplossing vormen voor duale probleem, maar ook optimaal zijn.

Optimale oplossing voor duale probleem (6)

Matrix M is:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & y_1 & y_2 & y_3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Optimale oplossing voor duale probleem (6)

Matrix M is:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & y_1 & y_2 & y_3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Matrix van initiële Simplex tableau is:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 18 \end{bmatrix}$$

Matrix van optimale Simplex tableau is:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1\frac{1}{2} & 1 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 2 \end{bmatrix}$$

Optimale oplossing voor duale probleem (6)

Matrix M is:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & y_1 & y_2 & y_3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Uit zevende kolom zien we dat

$$\begin{bmatrix} 1 & y_1 & y_2 & y_3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4y_1 + 12y_2 + 18y_3 \\ 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 \\ 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Optimale oplossing voor duale probleem (7)

Dus $y_1 = 0$, $y_2 = 1\frac{1}{2}$, $y_3 = 1$ is toegelaten oplossing van

$$\begin{array}{lcrrrcl}
\text{minimaliseer } W & = & 4y_1 & +12y_2 & +18y_3 & & \\
\text{onder voorwaarden} & & y_1 & & +3y_3 & \geq & 3 \\
 & & & 2y_2 & +2y_3 & \geq & 5 \\
 & & y_1, & y_2, & y_3 & \geq & 0
\end{array}$$

met waarde $W = 36$.

Optimale waarde van primale probleem is $Z^* = 36$.

Zwakke dualiteit $(Z^* \leq W^*)$, impliceert dan dat $W = 36$ optimale waarde moet zijn van duale probleem.

Dus $y_1 = 0$, $y_2 = 1\frac{1}{2}$, $y_3 = 1$ is optimale oplossing.

Sterke dualiteitsstelling

Als zowel primale als duale LP probleem toegelaten oplossingen hebben, dan hebben ze optimale oplossingen.

- Z^* is optimale waarde van primale probleem
- W^* is optimale waarde van duale probleem

Sterke dualiteitsstelling

Als zowel primale als duale LP probleem toegelaten oplossingen hebben, dan geldt voor optimale waarden:

$$Z^* = W^*$$

Complementaire slackness (1)

Beschouw (primale) LP probleem:

$$\begin{array}{lll} \text{maximaliseer} & Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ \text{onder voorwaarden} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & \leq \quad b_i, \quad i = 1, \ldots, m \\ & x_j & \geq \quad 0 \end{array}$$

Duale probleem is:

$$\begin{array}{lll} \text{minimaliseer} & W = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i & \\ \text{onder voorwaarden} & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i & \geq \quad c_j, \quad j = 1, \ldots, n \\ & y_i & \geq \quad 0 \end{array}$$

Complementaire slackness

Als $x_1, \ldots, x_n$ optimale oplossing is van primale probleem en $y_1, \ldots, y_m$ optimale oplossing is van duale probleem, dan geldt:

$$y_i(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j) = 0 \text{ voor alle } i = 1, \ldots, m.$$

Complementaire slackness (2)

Bewijs

$$\begin{aligned} Z^* = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j &\leq \sum_{j=1}^{n} [\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i] x_j \\ &= \sum_{i=1}^{m} [\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j] y_i \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i = W^* \end{aligned}$$

Sterke dualiteit impliceert $Z^* = W^*$, en derhalve

$$\sum_{i=1}^{m} [\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j] y_i = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \Longrightarrow \sum_{i=1}^{m} y_i (b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j) = 0,$$

oftewel

$$y_i (b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j) = 0 \text{ voor alle } i = 1, \ldots, m.$$

Complementaire slackness (3)

Beschouw (primale) LP probleem:

$$\begin{array}{lll} \text{maximaliseer} & Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ \text{onder voorwaarden} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & \leq \quad b_i, \quad i = 1, \ldots, m \\ & x_j & \geq \quad 0 \end{array}$$

Duale probleem is:

$$\begin{array}{lll} \text{minimaliseer} & W = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i & \\ \text{onder voorwaarden} & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i & \geq \quad c_j, \quad j = 1, \ldots, n \\ & y_i & \geq \quad 0 \end{array}$$

Complementaire slackness

Als $x_1, \ldots, x_n$ optimale oplossing is van primale probleem en $y_1, \ldots, y_m$ optimale oplossing is van duale probleem, dan geldt:

- Als $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j < b_i$, dan $y_i = 0$.
- Als $y_i > 0$, dan $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$.

Complementaire slackness (4)

Duale probleem van duale probleem is weer primale probleem.

Complementaire slackness (5)

Beschouw (primale) LP probleem:

$$\begin{array}{lll} \text{maximaliseer} & Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ \text{onder voorwaarden} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & \leq \; b_i, \quad i = 1, \ldots, m \\ & x_j & \geq \; 0 \end{array}$$

Duale probleem is:

$$\begin{array}{lll} \text{minimaliseer} & W = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i & \\ \text{onder voorwaarden} & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i & \geq \; c_j, \quad j = 1, \ldots, n \\ & y_i & \geq \; 0 \end{array}$$

Complementaire slackness

Als $x_1, \ldots, x_n$ optimale oplossing is van primale probleem en $y_1, \ldots, y_m$ optimale oplossing is van duale probleem, dan geldt:

$$x_j(c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i) = 0 \text{ voor alle } j = 1, \ldots, n.$$

Samenvatting van vandaag

- 'Sterke' dualiteit
- Complementaire slackness

Instructies (vandaag, 10:45–12:30) in vier zalen:

Zaal	**voor studenten met achternaam beginnend**
Aud 10	met letters A tot en met D
Pav b2	met letters E tot en met K
Pav m23	met letters L tot en met R
Ipo 0.98	met letters S tot en met Z