TU/e

2DD50: Wiskunde 2 (1)

Tussentoets

- **26 november**, tijdens de instructies
- **Zaal:** paviljoen (study hub)
- **Time:** 90min

- Tentamenstof: colleges 1–4
  (LP; Simplex; dualiteit; complementaire slackness)
- Oude tentamens:
  `www.win.tue.nl/~gwoegi/2DD50/OPT/tentamen.html`

Voor gedetailleerde informatie en college materiaal:

`www.win.tue.nl/~gwoegi/2DD50/OPT/`

2DD50: Wiskunde 2 (2)

Tussentoets

- Bij de tussentoets mag een eenvoudige (niet programmeerbare) rekenmachine meegenomen worden, en 1 tweezijdig A4-tje met daarop handgeschreven aantekeningen die men nodig denkt te hebben bij het maken van de toets
- geen boeken, geen kopieën

- Als een antwoord twee verschillende oplossingen bevat dan krijg je nul punten.
- Als een langere berekening (zoals toepassen van de simplexmethode of het oplossen van een transportprobleem) een fout bevat, dan krijg je alleen punten voor het deel voorafgaand aan de fout.

Waar waren we ook al weer gebleven?

Vorige keer

- Dualiteit

Vandaag

- Transportproblemen
- Toewijzingsproblemen

Transportproblemen (1)

Beschouw volgende situatie:

- m producenten, met aanbod $s_1, s_2, \ldots, s_m$ van product
- n consumenten, met vraag $d_1, d_2, \ldots, d_n$ naar product
- Transportkosten van producent i naar consument j bedragen $c_{i,j}$ (per eenheid product)

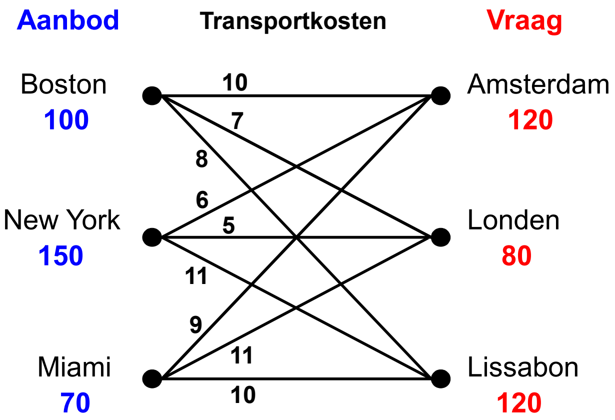
Probleem Bepaal hoeveelheid product $x_{i,j}$ dat van producent i naar consument j moet worden getransporteerd zodanig dat:

1. Totale transportkosten minimaal zijn
2. Aanbod van iedere producent volledig wordt benut
3. Vraag van iedere consument volledig wordt vervuld

Neem voor nu aan dat totale aanbod gelijk is aan totale vraag: $S = \sum_{i=1}^{m} s_i = \sum_{j=1}^{n} d_j = D$

Transportproblemen: eerste voorbeeld

Vervoer van ijzererts van Noord Amerika naar Europa



Probleem Hoeveelheid ijzererts moet tussen elk tweetal havens worden verscheept zodanig dat totale transportkosten worden geminimaliseerd?

Transportproblemen tweede voorbeeld

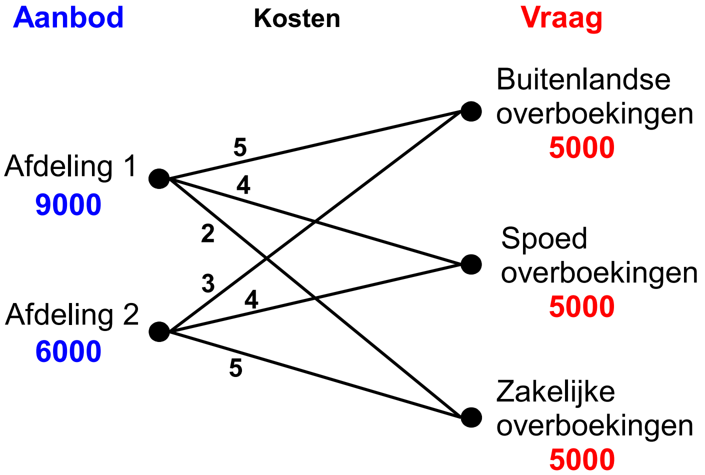
Bank beschikt over twee afdelingen om overboekingen uit te voeren

- Afdeling 1 kan hoogstens 9000 overboekingen uitvoeren
  Afdeling 2 kan hoogstens 6000 overboekingen uitvoeren
- Drie typen overboekingen
  - Buitenlandse overboekingen
  - Spoed overboekingen
  - Zakelijke overboekingen
- 5000 overboekingen van elk type
- Kosten voor uitvoeren van overboekingen bedragen:

	afdeling 1	afdeling 2
Buitenlands	5 cent	3 cent
Spoed	4 cent	4 cent
Zakelijk	2 cent	5 cent

Transportproblemen tweede voorbeeld (2)

Probleem Hoeveel overboekingen van elk type moet door beide afdelingen worden uitgevoerd zodanig dat de totale verwerkingskosten worden geminimaliseerd?



Transportproblemen tweede voorbeeld (3)

LP formulering:

x_{ij}: aantal overboekingen van type j ($j = 1, 2, 3$) dat wordt uitgevoerd door afdeling i ($i = 1, 2$)

$$
\begin{array}{lllll}
\text{minimaliseer} & \multicolumn{4}{l}{5x_{11} + 4x_{12} + 2x_{13} + 3x_{21} + 4x_{22} + 5x_{23}} \\
\text{onder voorwaarden} & x_{11} + x_{12} + x_{13} & = 9000 & \text{aanbod} \\
 & x_{21} + x_{22} + x_{23} & = 6000 & \text{aanbod} \\
 & x_{11} + x_{21} & = 5000 & \text{vraag} \\
 & x_{12} + x_{22} & = 5000 & \text{vraag} \\
 & x_{13} + x_{23} & = 5000 & \text{vraag} \\
 & x_{ij} \geq 0 & i = 1, 2 & j = 1, 2, 3
\end{array}
$$

Transportproblemen tweede voorbeeld (4)

Stel nu dat afdeling 1 meer overboekingen kan uitvoeren, namelijk 10000 in plaats van 9000

Totale aanbod stijgt van 15000 naar 16000, maar vraag blijft 15000

We moeten probleem weer in balans brengen

- Introduceer nieuw type overboekingen: dummy (nep) overboekingen
- 1000 dummy overboekingen om probleem weer in balans te brengen
- Verwerkingskosten van dummy overboekingen zijn 0 in beide afdelingen

Transportproblemen tweede voorbeeld (5)

Na introduceren van dummy overboekingen verkrijgen we:

$$
\begin{array}{lllll}
\text{minimaliseer} & 5x_{11} + 4x_{12} + 2x_{13} + 3x_{21} + 4x_{22} + 5x_{23} & & & \\
\text{onder voorwaarden} & x_{11} + x_{12} + x_{13} & = \mathbf{10000} & & \text{aanbod} \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} & = 6000 & & \text{aanbod} \\
& x_{11} + x_{21} & = 5000 & & \text{vraag} \\
& x_{12} + x_{22} & = 5000 & & \text{vraag} \\
& x_{13} + x_{23} & = 5000 & & \text{vraag} \\
& \mathbf{x_{14}} + \mathbf{x_{24}} & = \mathbf{1000} & & \textbf{dummy vraag} \\
& x_{ij} \geq 0 & i = 1, 2 & & j = 1, 2, 3, 4
\end{array}
$$

Algemene LP formulering

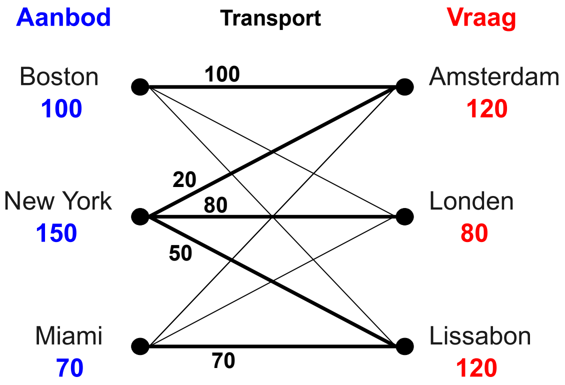
$$
\begin{array}{rll}
\text{minimaliseer} & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} & \\
\text{onder voorwaarden} & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i & i = 1\dots m \text{ (aanbod)} \\
& \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j & j = 1\dots n \text{ (vraag)} \\
& x_{ij} \geq 0 & i = 1\dots m, j = 1\dots n
\end{array}
$$

Transportprobleem is gebalanceerd indien:

$$S = \sum_{i=1}^{m} s_i = \sum_{j=1}^{n} d_j = D$$

Hoe kunnen we willekeurig transportprobleem gebalanceerd maken?

- Als totale aanbod totale vraag overstijgt ($S > D$), voeg dan dummy consument $n+1$ toe met
  - vraag $d_{n+1} = S - D$
  - transportkosten $c_{i,n+1} = 0$ voor alle producenten i
- Als totale vraag totale aanbod overtreft ($S < D$), voeg dan dummy producent $m+1$ toe met
  - aanbod $s_{m+1} = D - S$
  - transportkosten $c_{m+1,j} = 0$ voor alle consumenten j



Cruciale observatie

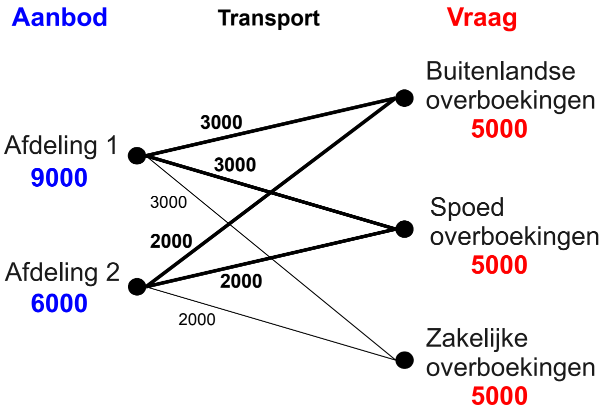
Als $x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{mn}$ optimale oplossing is (en andere variabelen nul zijn), dan vormen overeenkomstige lijnen in figuur forest (verzameling van bomen), dat wil zeggen, deze bevatten géén cycle

Waarom

Anders kan oplossing worden verbeterd door in cycle waarden van $x_{i,j}$ afwisselend te vergroten/verkleinen

Terug naar voorbeeld van bank

Mogelijke toewijzing:



Totale verwerkingskosten bedragen 57000

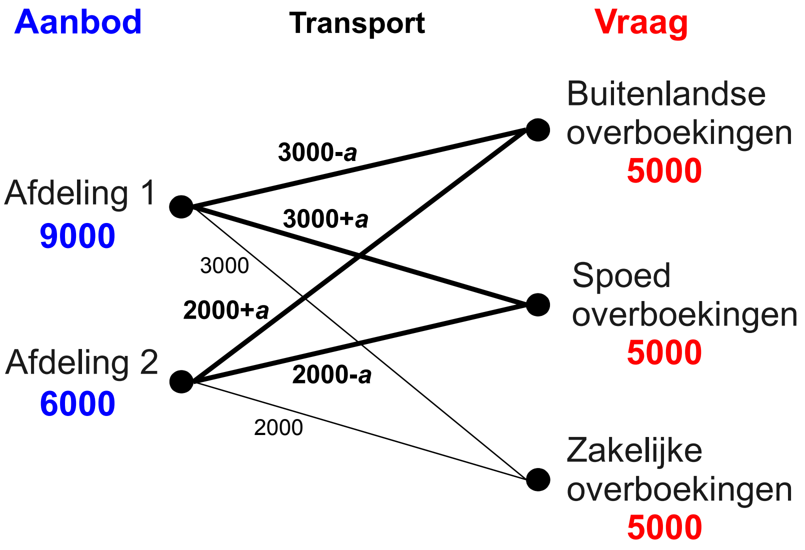
Maar deze toewijzing bevat een cycle!

Betere toewijzing is:

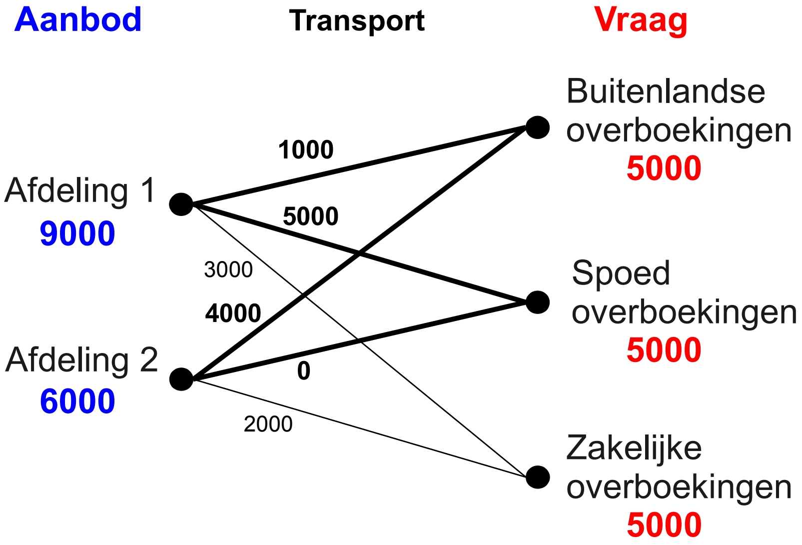
$$\begin{aligned}
x_{11} &= 3000 - a \quad (c_{11} = 5) \\
x_{12} &= 3000 + a \quad (c_{12} = 4) \\
x_{13} &= 3000 \\
x_{21} &= 2000 + a \quad (c_{21} = 3) \\
x_{22} &= 2000 - a \quad (c_{22} = 4) \\
x_{23} &= 2000
\end{aligned}$$

We kunnen a maximaal 2000 maken

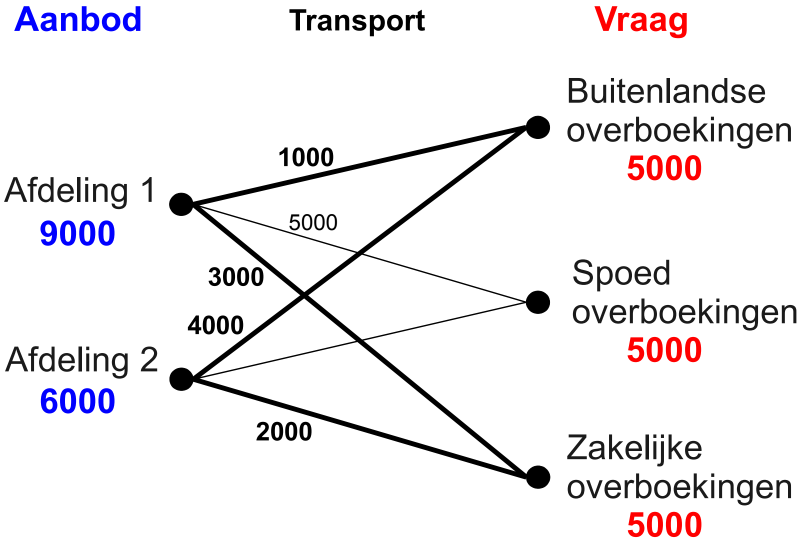
Dan worden de totale verwerkingskosten 53000



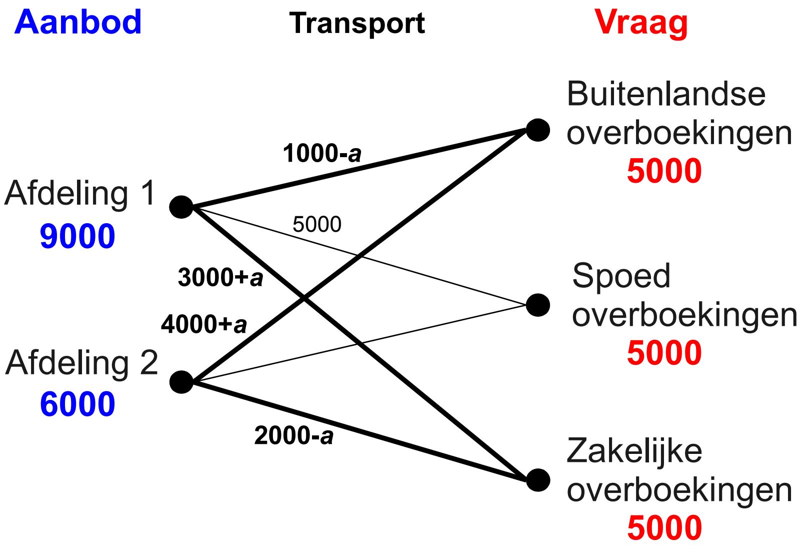
Afwisselend verhogen en verlagen van het transport over de cycle



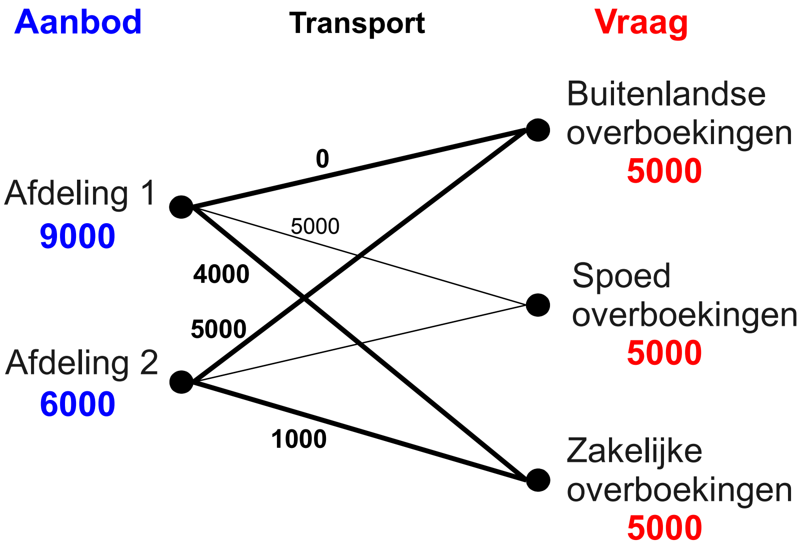
We krijgen nu deze toewijzing



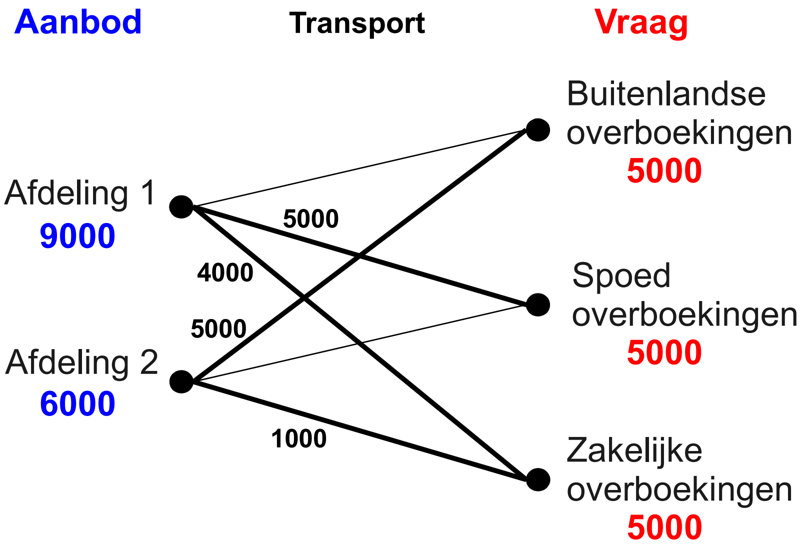
De toewijzing bevat nog steeds een cycle!



We kunnen weer afwisselend verhogen en verlagen over de cycle



We krijgen nu deze toewijzing



Deze toewijzing bevat geen cycle meer! Maar is hij optimaal?

Een basis bestaat uit $m + n - 1$ variabelen zodanig dat overeenkomstige lijnen in figuur géén cycle bevatten

- Variabelen in basis worden basis variabelen genoemd
- Alle andere variabelen worden niet-basis variabelen genoemd
- In een toegelaten basis oplossing zijn de niet-basis variabelen allemaal 0
- Als er basis variabelen nul zijn dan wordt de oplossing gedegenereerd genoemd

Oplossingsalgoritme:

- Vindt toegelaten basis oplossing
- Gaat van toegelaten basis oplossing naar volgende toegelaten basis oplossing totdat een optimale oplossing is gevonden.

Het is handig om met transport tableau te werken in plaats van grafische representatie

				supply
	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	c_{13} x_{13}	s_1
	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	c_{23} x_{23}	s_2
	c_{31} x_{31}	c_{32} x_{32}	c_{33} x_{33}	s_3
demand	D_1	D_2	D_3	

Vinden van toegelaten basis oplossing

Algemene procedure om toegelaten basis oplossing te vinden

Herhaal volgende stappen:

- Kies variabele x_{ij} uit 'overgebleven' rijen en kolommen
  - Noord-West hoek regel
  - Minimale-kosten regel
- Maak x_{ij} zo groot mogelijk – x_{ij} heeft dan resterend aanbod or resterende vraag in zijn rij en kolom 'uitgeput'
- Elimineer betreffende rij of kolom (maar niet beide in geval x_{ij} zowel resterend aanbod in rij als resterende vraag in kolom tegelijkertijd heeft uitgeput)

Als nog slechts één rij of één kolom overblijft kunnen we de overgebleven getallen gemakkelijk invullen.

Noord-West hoek regel

Herhaal volgende stappen:

1. Neem cell in Noord-West hoek (linksboven) van overgebleven rijen en kolommen
2. Maak overeenkomstige variabele zo groot mogelijk
3. Als variabele resterend aanbod in rij of column heeft uitgeput, elimineer dan deze rij of column (maar niet beide)

Als nog slechts één rij of één kolom overblijft kunnen we de overgebleven getallen gemakkelijk invullen.

$\boxed{5}$ 5000	$\boxed{4}$ 4000	$\boxed{2}$	9000
$\boxed{3}$	$\boxed{4}$ 1000	$\boxed{5}$ 5000	6000
5000	5000	5000	

Minimale-kosten regel

Herhaal volgende stappen:

1. Neem cell met minimale kosten van overgebleven rijen en kolommen
2. Maak overeenkomstige variabele zo groot mogelijk
3. Als variabele resterend aanbod in rij of column heeft uitgeput, elimineer dan deze rij of column (maar niet beide)

Als nog slechts één rij of één kolom overblijft kunnen we de overgebleven getallen gemakkelijk invullen.

$\boxed{5}$	$\boxed{4}$ 4000	$\boxed{2}$ 5000	9000
$\boxed{3}$ 5000	$\boxed{4}$ 1000	$\boxed{5}$	6000
5000	5000	5000	

Wanneer is optimale oplossing gevonden?

Bereken getallen $u_1, u_2, \ldots, u_m$ en $v_1, v_2, \ldots, v_n$ zodanig dat:

$$c_{ij} = u_i + v_j$$

voor elke basis variabele x_{ij}

Wanneer is optimale oplossing gevonden?

Bereken getallen $u_1, u_2, \ldots, u_m$ en $v_1, v_2, \ldots, v_n$ zodanig dat:

$$c_{ij} = u_i + v_j$$

voor elke basis variabele x_{ij}

Neem rij of kolom l die grootste aantal basis-variabelen bevat

- Als dat een rij is, kies dan $u_l = 0$;
  als het een kolom is, kies dan $v_l = 0$
- Bepaal resterende u_i's en v_j's

				supply	u_i
	$\boxed{5}$ 5000	$\boxed{4}$ 4000	$\boxed{2}$	9000	0
	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$ 1000	$\boxed{5}$ 5000	6000	0
demand	5000	5000	5000		
v_j	5	4	5		

Stelling

Als voor elke variabele x_{ij} geldt

$$c_{ij} \geq u_i + v_j$$

dan is oplossing optimaal

- Voor elke basis variabele x_{ij} geldt $c_{ij} - u_i - v_j = 0$
- Als er variabele x_{ij} is waarvoor $c_{ij} - u_i - v_j < 0$, dan kan oplossing worden verbeterd

Getallen u_i, v_j zijn te interpreteren als duale variabelen

Stap om van toegelaten basis oplossing naar volgende toegelaten basis oplossing te gaan

- voeg variabele toe aan basis
- verwijder variabele uit basis
- zodanig dat nieuwe oplossing niet slechter is dan oude oplossing

Aantal basis variabelen blijft $m + n - 1$

Keten reacties

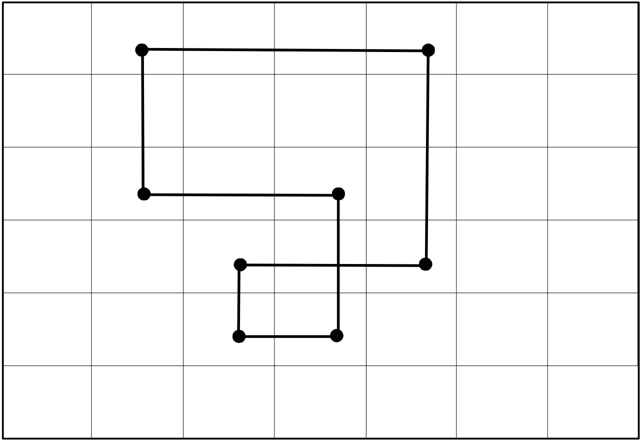
Reeks van minstens vier cellen wordt keten reactie genoemd indien:

1. elk paar opeenvolgende cellen behoort tot zelfde rij of kolom
2. geen enkel drietal opeenvolgende cellen behoort tot dezelfde rij of kolom
3. laatste cel komt overeen met eerste cel

In grafische representatie, correspondeert keten reactie met cycle

In schaakspel, rondreis van toren die afwisselend rijen en kolommen volgt

Voorbeeld keten reactie



Algemeen algoritme

- Bereken $u_1, \ldots, u_m$ en $v_1, \ldots, v_n$
  - Als $c_{ij} - u_i - v_j \geq 0$ voor alle i en j, dan is oplossing optimaal
  - Neem anders x_{ij} zodanig dat $c_{ij} - u_i - v_j < 0$:
    dit wordt de nieuwe basis variabele

Algemeen algoritme

- Bereken $u_1, \ldots, u_m$ en $v_1, \ldots, v_n$
  - Als $c_{ij} - u_i - v_j \geq 0$ voor alle i en j, dan is oplossing optimaal
  - Neem anders x_{ij} zodanig dat $c_{ij} - u_i - v_j < 0$:
    dit wordt de nieuwe basis variabele
- Vind keten reactie voor nieuwe basis variabele
  - Label cellen in keten reactie afwisselend met $+$ en $-$;
  - Nieuwe basis variabele moet label $+$ krijgen

Algemeen algoritme

- Bereken $u_1, \ldots, u_m$ en $v_1, \ldots, v_n$
  - Als $c_{ij} - u_i - v_j \geq 0$ voor alle i en j, dan is oplossing optimaal
  - Neem anders x_{ij} zodanig dat $c_{ij} - u_i - v_j < 0$: dit wordt de nieuwe basis variabele
- Vind keten reactie voor nieuwe basis variabele
  - Label cellen in keten reactie afwisselend met $+$ en $-$;
  - Nieuwe basis variabele moet label $+$ krijgen
- Bepaal minimum van x_{ij} over alle cellen in keten reactie met label $-$: noteer dat met θ
  - Voor elke variabele x_{ij} in $-$ cell, neem $x_{ij} := x_{ij} - \theta$
  - Voor elke variabele x_{ij} in $+$ cell, neem $x_{ij} := x_{ij} + \theta$

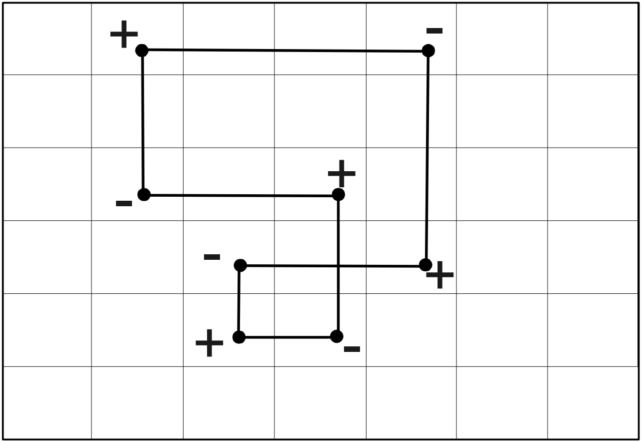
Algemeen algoritme

- Bereken $u_1, \ldots, u_m$ en $v_1, \ldots, v_n$
  - Als $c_{ij} - u_i - v_j \geq 0$ voor alle i en j, dan is oplossing optimaal
  - Neem anders x_{ij} zodanig dat $c_{ij} - u_i - v_j < 0$:
    dit wordt de nieuwe basis variabele
- Vind keten reactie voor nieuwe basis variabele
  - Label cellen in keten reactie afwisselend met $+$ en $-$;
  - Nieuwe basis variabele moet label $+$ krijgen
- Bepaal minimum van x_{ij} over alle cellen in keten reactie met label $-$: noteer dat met θ
  - Voor elke variabele x_{ij} in $-$ cell, neem $x_{ij} := x_{ij} - \theta$
  - Voor elke variabele x_{ij} in $+$ cell, neem $x_{ij} := x_{ij} + \theta$
- Verwijder één van variabelen die nul zijn geworden uit de basis

Algemeen algoritme

- Bereken $u_1, \ldots, u_m$ en $v_1, \ldots, v_n$
  - Als $c_{ij} - u_i - v_j \geq 0$ voor alle i en j, dan is oplossing optimaal
  - Neem anders x_{ij} zodanig dat $c_{ij} - u_i - v_j < 0$: dit wordt de nieuwe basis variabele
- Vind keten reactie voor nieuwe basis variabele
  - Label cellen in keten reactie afwisselend met $+$ en $-$;
  - Nieuwe basis variabele moet label $+$ krijgen
- Bepaal minimum van x_{ij} over alle cellen in keten reactie met label $-$: noteer dat met θ
  - Voor elke variabele x_{ij} in $-$ cell, neem $x_{ij} := x_{ij} - \theta$
  - Voor elke variabele x_{ij} in $+$ cell, neem $x_{ij} := x_{ij} + \theta$
- Verwijder één van variabelen die nul zijn geworden uit de basis
- Totale kosten gereduceerd met $(c_{ij} - u_i - v_j)\theta$

Label cellen in keten reactie afwisselend met $+$ en $-$



De cellen met $+$ worden verhoogd en de cellen met $-$ verlaagd

Voorbeeld

				supply	u_i
	$\boxed{5}$ 5000	$\boxed{4}$ 4000	$\boxed{2}$ -3	9000	0
	$\boxed{3}$ -2	$\boxed{4}$ 1000	$\boxed{5}$ 5000	6000	0
demand	5000	5000	5000		
v_j	5	4	5		

Basis variabelen zijn: $x_{11}, x_{12}, x_{22}, x_{23}$

Totale kosten bedragen 70000

- Voor x_{13} krijgen we $c_{13} - u_1 - v_3 = 2 - 0 - 5 = -3$

Voorbeeld

				supply	u_i
	5 5000	4 4000	2 −3	9000	0
	3 −2	4 1000	5 5000	6000	0
demand	5000	5000	5000		
v_j	5	4	5		

Basis variabelen zijn: $x_{11}, x_{12}, x_{22}, x_{23}$

Totale kosten bedragen 70000

- Voor x_{13} krijgen we $c_{13} - u_1 - v_3 = 2 - 0 - 5 = -3$
- Voor x_{21} krijgen we $c_{21} - u_2 - v_1 = 3 - 0 - 5 = -2$

Voorbeeld

				supply	u_i
	$\boxed{5}$ 5000	$\boxed{4}$ 4000	$\boxed{2}$ −3	9000	0
	$\boxed{3}$ −2	$\boxed{4}$ 1000	$\boxed{5}$ 5000	6000	0
demand	5000	5000	5000		
v_j	5	4	5		

Basis variabelen zijn: $x_{11}, x_{12}, x_{22}, x_{23}$

Totale kosten bedragen 70000

- Voor x_{13} krijgen we $c_{13} - u_1 - v_3 = 2 - 0 - 5 = -3$
- Voor x_{21} krijgen we $c_{21} - u_2 - v_1 = 3 - 0 - 5 = -2$
- De oplossing is niet optimaal
- We kiezen x_{13} als nieuwe basis variabele

				supply	u_i
	[5] 5000	[4] 4000 $-$	[2] $+$ -3	9000	0
	[3] -2	[4] 1000 $+$	[5] 5000 $-$	6000	0
demand	5000	5000	5000		
v_j	5	4	5		

Keten reactie: $x_{13} - -x_{23} - -x_{22} - -x_{12} - -x_{13}$

$\theta = \min\{4000, 5000\} = 4000$

				supply	u_i
	[5] 5000	[4] 4000 $-$	[2] $+$ -3	9000	0
	[3] -2	[4] 1000 $+$	[5] 5000 $-$	6000	0
demand	5000	5000	5000		
v_j	5	4	5		

Keten reactie: $x_{13} - -x_{23} - -x_{22} - -x_{12} - -x_{13}$

$\theta = \min\{4000, 5000\} = 4000$

[5] 5000	[4] 0	[2] 4000	9000
[3] 0	[4] 5000	[5] 1000	6000
5000	5000	5000	

$\boxed{5}$ 5000	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{2}$ 4000	9000
$\boxed{3}$ 0	$\boxed{4}$ 5000	$\boxed{5}$ 1000	6000
5000	5000	5000	

Nieuwe basis variabelen: $x_{11}, x_{13}, x_{22}, x_{23}$

Totale kosten bedragen 58000

Nog niet optimaal

Na enkele verdere stappen wordt optimale oplossing gevonden met totale kosten 45000

Stelling

Als waarden van elk aanbod s_i en elke vraag d_j geheeltallig zijn, dan heeft transportprobleem optimale oplossing die geheeltallig is.

Samenvatting transportproblemen

- Vindt toegelaten basisoplossing met
  - Noord-Westhoek regel of
  - Minimale-kosten regel

Samenvatting transportproblemen

- Vindt toegelaten basisoplossing met
  - Noord-Westhoek regel of
  - Minimale-kosten regel
- Bepaal u_i en v_j zodanig dat $c_{ij} = u_i + v_j$ voor alle basisvariabelen

Samenvatting transportproblemen

- Vindt toegelaten basisoplossing met
  - Noord-Westhoek regel of
  - Minimale-kosten regel
- Bepaal u_i en v_j zodanig dat $c_{ij} = u_i + v_j$ voor alle basisvariabelen
- Als $c_{ij} - u_i - v_j < 0$ voor een (niet-basis) variabele x_{ij} dan kunnen we die variabele de basis inbrengen door een keten reactie

Samenvatting transportproblemen

- Vindt toegelaten basisoplossing met
  - Noord-Westhoek regel of
  - Minimale-kosten regel
- Bepaal u_i en v_j zodanig dat $c_{ij} = u_i + v_j$ voor alle basisvariabelen
- Als $c_{ij} - u_i - v_j < 0$ voor een (niet-basis) variabele x_{ij} dan kunnen we die variabele de basis inbrengen door een keten reactie
- Als $c_{ij} - u_i - v_j \geq 0$ voor alle (niet-basis) variabelen dan is de oplossing optimaal

Toewijzingsprobleem (1)

Beschouw volgende situatie:

- n medewerkers
- n taken
- kosten c_{ij} om medewerker i taak j te laten uitvoeren

	Schilderen	Wassen	Behangen
Jan	15	10	9
Karin	9	15	10
Ben	10	12	8

Probleem Hoe moeten taken aan medewerkers worden toegewezen zodanig dat totale kosten worden geminimaliseerd?

Toewijzingsprobleem (2)

Merk op:
toewijzingsprobleem is speciaal geval van transportprobleem, met

- aanbod 1 (van elke medewerker/producent)
- vraag 1 (van elke taak/consument)
- evenveel producenten/medewerkers als consumenten/taken

Toewijzingsprobleem (3)

15	10	9	1
9	15	10	1
10	12	8	1
1	1	1	

Toewijzingsprobleem (3)

15	10	9	1
9	15	10	1
10	12	8	1
1	1	1	

Minimale-kosten regel geeft start oplossing:

15 0	10 1	9 0	1
9 1	15	10	1
10	12	8 1	1
1	1	1	

Toewijzingsprobleem (4)

					u
	$\boxed{15}$ 0	$\boxed{10}$ 1	$\boxed{9}$ 0	1	0
	$\boxed{9}$ 1	$\boxed{15}$ 9	$\boxed{10}$ 7	1	−6
	$\boxed{10}$ −4	$\boxed{12}$ 3	$\boxed{8}$ 1	1	−1
	1	1	1		
v	15	10	9		

Toewijzingsprobleem (4)

					u
	$\boxed{15}$ 0	$\boxed{10}$ 1	$\boxed{9}$ 0	1	0
	$\boxed{9}$ 1	$\boxed{15}$ 9	$\boxed{10}$ 7	1	−6
	$\boxed{10}$ −4	$\boxed{12}$ 3	$\boxed{8}$ 1	1	−1
	1	1	1		
v	15	10	9		

We vinden keten reactie:

					u
	$\boxed{15}$ 0 −	$\boxed{10}$ 1	$\boxed{9}$ 0 +	1	0
	$\boxed{9}$ 1	$\boxed{15}$ 9	$\boxed{10}$ 7	1	−6
	$\boxed{10}$ + −4	$\boxed{12}$ 3	$\boxed{8}$ 1 −	1	−1
	1	1	1		
v	15	10	9		

Toewijzingsprobleem (5)

					u
	$\boxed{15}$ 4	$\boxed{10}$ 1	$\boxed{9}$ 0	1	0
	$\boxed{9}$ 1	$\boxed{15}$ 7	$\boxed{10}$ 3	1	−2
	$\boxed{10}$ 0	$\boxed{12}$ 4	$\boxed{8}$ 1	1	−1
	1	1	1		
v	11	10	9		

Optimale toewijzing is:

- Jan ↔ Wassen
- Karin ↔ Schilderen
- Ben ↔ Behangen