Tentamen Optimalisering (2DD15)
Woensdag 4 Juli 2012, 14:00–17:00

Dit tentamen bestaat uit 5 opgaven op 3 pagina's (plus 2 pagina's feitenblad). Er zijn in totaal 50 punten te verdienen. Je cijfer wordt berekend door je behaalde punten door 5 te delen en af te ronden naar het dichtstbijzijnde gehele getal.

Geef een beknopte maar duidelijke motivering voor alle antwoorden. Een antwoord zonder motivering levert geen punten op, tenzij expliciet staat vermeld dat geen toelichting is vereist.

Het gebruik van college aantekeningen, het boek, de slides, of enig ander materiaal is absoluut niet toegestaan. De enige toegelaten hulpmiddelen zijn pen en potlood, een (grafische) rekenmachine en het officiële feitenblad bijgevoegd aan het einde van het tentamen.

—— *** ——

Opgave 1. Een webwinkel overweegt opslagruimte te huren voor de eerstvolgende 5 maanden. De exact benodigde opslagruimte (gemeten in vierkante meters) is per maand verschillend en is gegeven in de volgende tabel:

maand	1	2	3	4	5
benodigde ruimte	4000	1000	3000	5000	2000

Aangezien de behoefte verschilt per maand is het wellicht een goed idee om vijf één-maands contracten af te sluiten. Anderzijds is de prijs per vierkante meter voor een extra maand in een contract veel lager dan de prijs voor de eerste maand.

contract duur (in maanden)	1	2	3	4	5
Prijs per vierkante meter	€70	€100	€125	€145	€160

De webwinkel wil nagaan hoe ze de hoeveelheid ingehuurde opslagruimte het beste kunnen variëren door een combinatie af te sluiten van contracten van verschillende grootte, starttijd en lengte. De voorwaarde is te allen tijde voldoende opslagruimte te hebben, en het doel is daar in totaal zo weinig mogelijk voor te betalen.

(a) [5 punten] Formuleer een lineair programmeringsmodel voor dit probleem.

(b) [5 punten] Licht de betekenis van elke constraint toe en verklaar de keuze van de doelfunctie.

(Hint: Gebruik variabelen $x_{i,j}$ met $1 \leq i \leq j \leq 5$ om de hoeveelheid vierkante meters aan te duiden gehuurd in een huurcontract dat start in maand i en loopt tot en met maand j.)

—— *** ——

Opgave 2. Beschouw het volgende lineaire programmeringsprobleem (LP probleem)

$$\begin{array}{llllll} \min & -2x_1 & -4x_2 & -3x_3 & & \\ \text{o.d.v.} & x_1 & +3x_2 & +2x_3 & = & 12 \\ & 3x_1 & +5x_2 & +3x_3 & \geq & 24 \end{array}$$

met de standaard niet-negativiteitsvoorwaarden $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

(a) [2 punten] Breng dit LP probleem in standaard vorm (zie feitenblad).

(b) [3 punten] Breng dit LP probleem nu in een vorm die geschikt is voor de eerste fase van de **Twee-fasen methode**. Gebruik de eerste fase van de **Twee-fasen methode** om een toegelaten basis oplossing te vinden. Geef alle stappen duidelijk aan en geef voor elke stap het tableau.

(c) [3 punten] Los dit LP probleem op met de tweede fase van de **Simplex methode**. Begin met de toegelaten basis oplossing die je in (b) gevonden hebt. Geef alle stappen duidelijk aan en geef voor elke stap het tableau. Geef de optimale oplossing en de bijbehorende optimale waarde.

(d) [2 punten] Nu verandert het LP van 'min' naar 'max'. Bepaal de nieuwe optimale oplossing en de bijbehorende optimale waarde.

—— *** ——

Opgave 3. Beschouw het volgende LP probleem:

$$\begin{array}{llllll}
\max Z & = & \frac{1}{2}x_1 & +3x_2 & +x_3 & & \\
\text{o.d.v.} & & x_1 & +x_2 & +x_3 & \leq & 30 \\
 & & 2x_1 & +x_2 & -x_3 & \leq & 20 \\
 & & & x_2 & +x_3 & \leq & 20 \\
 & & x_1, & x_2, & x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

Na het introduceren van slackvariabelen en toepassen van de Simplex methode wordt het volgende eindtableau verkregen:

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	$3\frac{1}{2}$	0	0	2	1	0	80
x_3	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	5
x_2	0	$1\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	25
s_3	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	15

(a) [2 punten] Formuleer het duale LP probleem.

(b) [2 punten] Lees de optimale oplossing van het LP probleem af uit het gegeven tableau. Lees ook de optimale oplossing van het duale probleem af uit het gegeven tableau.

(c) [3 punten] Hoe veel kan de rechterzijdeconstante van de 1e functionele restrictie verhoogd respectievelijk verlaagd worden terwijl de huidige optimale basis nog steeds toegelaten en optimaal blijft?

(d) [3 punten] Beschouw nu het volgende LP probleem:

$$\begin{array}{lllllll}
\max Z & = & \frac{1}{2}x_1 & +3x_2 & +x_3 & +2x_4 & & \\
\text{o.d.v.} & & x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & \leq & 30 \\
 & & 2x_1 & +x_2 & -x_3 & -3x_4 & \leq & 20 \\
 & & & x_2 & +x_3 & +5x_4 & \leq & 20 \\
 & & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq & 0
\end{array}$$

Ga na of de optimale oplossing uit (b) met $x_4 = 0$ nog steeds optimaal is voor dit aangepaste LP probleem.

—— *** ——

Opgave 4. Los het volgende geheeltallige LP probleem op met de branch-and-bound methode:

$$\begin{array}{rl} \max & 7x_1 + 12x_2 \\ \text{o.d.v.} & 7x_1 + 11x_2 \ \leq \ 59 \\ & 0 \leq x_1, x_2 \leq 6; \quad x_1, x_2 \text{ geheeltallig} \end{array}$$

Bounding: Formuleer de bijbehorende LP-relaxatie en los deze op.
Branching: Splits altijd bij een variabele die niet geheeltallig is in de optimale oplossing van de LP-relaxatie. Als $x_i = f$ niet geheeltallig is, splits het probleem dan op in deelproblemen met respectievelijk $x_i \leq \lfloor f \rfloor$ en $x_i \geq \lfloor f \rfloor + 1$.
Snoeien: De boom wordt gesnoeid in een deelprobleem als (i) de LP-relaxatie een geheeltallige optimale oplossing heeft; of als (ii) de LP-relaxatie geen toegelaten oplossing heeft; of als (iii) de optimale waarde van de LP-relaxatie lager is dan de waarde van de beste gevonden geheeltallige oplossing.

(a) [9 punten] Geef de branch-and-bound boom en geef voor elk deelprobleem dat in de branch-and-bound methode wordt gegenereerd: formulering van het geheeltallige LP-probleem; formulering van de LP-relaxatie; optimale oplossing van de LP-relaxatie; eventueel verkregen boven- en ondergrenzen.
Twee opmerkingen: ten eerste, als je de boom in een deelprobleem snoeit, geef dan altijd aan welke van de drie regels (i), (ii), (iii) je gebruikt. Ten tweede, het is niet nodig om aan te geven *hoe* je de oplossingen van de LP-relaxaties vindt.

(b) [1 punt] Geef de optimale geheeltallige oplossing.

—— *** ——

Opgave 5. Beschouw het volgende transportprobleem met drie producenten en vier consumenten:

8	9	21	6	9
22	1	13	9	3
3	4	5	1	6
5	4	5	T	

(a) [1 punt] Bepaal de waarde van T waarvoor de totale vraag gelijk is aan het totale aanbod. Vanaf nu werk je met deze waarde van T.

(b) [3 punten] Vind een toegelaten basis oplossing door de **Noord-West hoek** regel te gebruiken.

(c) [5 punten] Bepaal een optimale oplossing door de simplex methode voor transportproblemen toe te passen. Begin met de toegelaten basis oplossing die je in (b) gevonden hebt en geef elke stap duidelijk aan.

(d) [1 punt] Wat zijn de kosten van de optimale oplossing?