Technische Universiteit Eindhoven – Faculteit Wiskunde & Informatica

Tentamen Optimalisering (2DD15)

Vrijdag 24 juni 2011, 9:00–12:00 uur

Het tentamen bestaat uit zeven opgaven. Bij elke opgave staat het maximale aantal te behalen punten tussen vierkante haken vermeld. In totaal zijn maximaal 100 punten te behalen. Het resultaat wordt bepaald door het totale aantal behaalde punten door 10 te delen en vervolgens af te ronden.

Het gebruik van college aantekeningen, het boek, de slides, of enig ander materiaal is absoluut *niet* toegestaan. De enige toegelaten hulpmiddelen zijn een (grafische) rekenmachine en het officiële feitenblad bijgevoegd aan het einde van het tentamen.

Geef een beknopte maar duidelijke motivering voor alle antwoorden. Een antwoord zonder motivering levert geen punten op, tenzij expliciet staat vermeld dat geen toelichting is vereist.

Opgave 1 [10 pt]
Beschouw het volgende lineaire programmeringsprobleem (LP probleem):

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} \text{maximaliseer} & Z = & 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & \\ \text{onder de voorwaarden} & & 6x_1 & - & x_2 & - & x_3 & \leq & 28 \\ & & 6x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & \leq & 34 \\ & & 4x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & \leq & 36 \\ & & & & \multicolumn{5}{c}{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0} \end{array}$$

Introduceer slack variabelen s_1, s_2 en s_3 voor de drie functionele restricties. Geef het Simplex tableau dat hoort bij de startoplossing met s_1, s_2 en s_3 als basisvariabelen, en voer vervolgens één verbeteringstap uit.

Opgave 2 [10 pt]
Beschouw het LP probleem van Opgave 1.

Na het uitvoeren van de Simplex methode wordt het volgende eindtableau verkregen:

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b
Z	1				0	$\frac{1}{5}$	$\frac{9}{20}$	
(s_1)	0				1	$-1\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	
(x_1)	0				0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{20}$	
(x_2)	0				0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	

Vul de getallen in die in het bovenstaande eindtableau ontbreken.

Opgave 3 [10 pt]
Beschouw het LP probleem van Opgave 1.

Stel nu dat de rechterzijde coëfficïent van de tweede functionele restrictie wordt veranderd in $34 + \Delta$. Bepaal voor welke waarden van Δ de oplossing met s_1, x_1 en x_2 als basisvariabelen optimaal blijft.

Opgave 4 [10 pt]
Beschouw het volgende LP probleem:

$$\begin{array}{rrcrcrcrcr} \text{maximaliseer} & Z & = & 3x_1 & + & 2x_2 & & & & \\ \text{onder de voorwaarden} & & & 6x_1 & - & x_2 & & & \leq & 28 \\ & & & 6x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & = & 34 \\ & & & 4x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & = & 36 \\ & & & & & \multicolumn{5}{l}{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0} \end{array}$$

Stel het bijbehorende duale probleem op (een specifieke toelichting is niet vereist), en geef de optimale oplossing van het duale probleem. Merk voor dat laatste op dat het bovenstaande probleem een sterke mate van gelijkenis vertoont met het LP probleem van Opgave 1.

Opgave 5 [20 pt]
Safe Way Ahead legt zich toe op de ontwikkeling, fabrikage en verkoop van produkten op het gebied van de verkeersveiligheid. Om haar internationale groeistrategie te realiseren, heeft de directie van Safe Way Ahead het voornemen om de fabrikage en verkoop activiteiten uit te breiden naar de Braziliaanse markt.

Er is een viertal potentiële produktielokaties geïdentificeerd. De vaste jaarlijkse operationele kosten (in Real) voor deze vier lokaties bedragen:

Lokatie	A	B	C	D
Kosten	8000000	3000000	4000000	7000000

De lokale overheid van de regio waar lokaties A en C toe behoren, heeft een jaarlijkse subsidie in het vooruitzicht gesteld van 2000000 Real als één produktievestiging in die regio wordt geopend, en een extra 1000000 Real als beide potentiële produktielokaties in bedrijf worden genomen.

Verder is een viertal produkten genomineerd voor mogelijke introductie op de Braziliaanse markt. De verwachte jaarlijkse afzetvolumes voor deze vier produkten bedragen:

Produkt	I	II	III	IV
Volume	900000	200000	500000	600000

Aangezien produkten II en IV een sterke mate van overeenkomst vertonen, heeft een externe marketing consultant geadviseerd om hoogstens één van deze beide produkten daadwerkelijk te introduceren.

De netto winst per eenheid voor de verschillende produkten op de diverse lokaties hangen af van de lokale arbeidskosten, regionale energieprijzen, en aanvoer van grondstoffen en transport van eindprodukten, en zijn als volgt (in Real):

	I	II	III	IV
A	90	70	75	65
B	45	25	55	30
C	35	35	50	40
D	80	50	65	45

De directie van Safe Way Ahead heeft de stafafdeling van het bedrijf opdracht gegeven na te gaan welke produkten moeten worden geïntroduceerd, welke potentiële produktielokaties in bedrijf moeten worden genomen en welke produkten waar moeten worden gefabriceerd, met inachtneming van het advies van de externe marketing consultancy expert. De doelstelling is de maximalisatie van de totale jaarlijkse netto winst (gebaseerd op de verwachte afzetvolumes en netto winst per eenheid, en verder rekening houdend met de vaste jaarlijkse operationele kosten en eventuele vestigingssubidie van de lokale overheid).

Laat zien hoe het bovenstaande probleem is te formuleren als een 0-1 lineair programmeringsprobleem. Geef duidelijk aan wat de betekenis is van de geïntroduceerde beslissingsvariabelen. De optimale oplossing hoeft **niet** te worden bepaald.

Opgave 6 [20 pt]
Holy Cow Dairy is een succesvol zuivelbedrijf met activiteiten in de staten Wyoming, Montana en Idaho. Met het oog op aanhoudende groei en significante schaalvoordelen heeft de directie van Holy Cow Dairy het voornemen een grote nieuwe zuivelfabriek te openen in Billings met een dagelijkse verwerkingscapaciteit van 1450 ton, en tegelijkertijd een aantal bestaande kleinere vestigingen te sluiten. De huidige fabrieken die voor mogelijke sluiting in aanmerking komen, zijn gevestigd in Boise, Bozeman, Casper, Great Falls en Idaho Falls, en hebben een dagelijkse verwerkingscapaciteit van respectievelijk 200, 250, 400, 550 en 700 ton. De verwachte kostenbesparingen, met inachtneming van hogere vervoerskosten, bij sluiting van de betreffende vestigingen bedragen respectievelijk 50, 60, 80, 120 en 130 miljoen dollar. De directie van Holy Cow Dairy wil een beslissing nemen welke bestaande vestigingen te sluiten na opening van de nieuwe fabriek in Billings, zodanig dat de totale verwachte kostenbesparing maximaal is, terwijl de totale dagelijkse verwerkingscapaciteit met minstens 500 ton wordt vergroot.

Laat zien hoe het bovenstaande probleem is te formuleren als een *knapsack* probleem, en gebruik de *branch-and-bound* methode om de optimale oplossing te bepalen. Geef duidelijk aan welke deelproblemen je uitrekent en hoe je de takken wegsnoeit. Het gaat erom te laten zien dat je het gebruik van de *branch-and-bound* methode beheerst. Als je direct de optimale oplossing ziet, dan mag je daar gebruik van maken in de toepassing van de *branch-and-bound* methode. Alleen de optimale oplossing geven zonder de *branch-and-bound* methode toe te passen, levert echter geen punten op.

Opgave 7 [20 pt]
De logistieke stafafdeling van de Joint Chiefs of Staff is belast met de voorbereiding van de gedeeltelijke terugtrekking van manschappen en materieel uit Afghanistan aan het einde van 2011. De terugtrekking behelst de repatriëring van troepen en materieel gestationeerd op legerbases in Helmand, Kandahar en Uruzgan. Voor deze logistieke operatie heeft men de beschikking over doorvoerroutes via een militaire vliegbasis in Kabul, een tijdelijke vliegbasis in Oezbekistan en een zeehaven in Pakistan. De terugtrekking vereist de afvoer van respectievelijk 500, 600 en 300 truckladingen vanuit de legerbases in Helmand, Kandahar en Uruzgan. De beschikbare capaciteit voor opslag en tijdig doorvervoer bedraagt respectievelijk 200, 400 en 800 truckladingen op de routes via Kabul, Oezbekistan en Pakistan.

De afstanden tussen de legerbases in Afghanistan en de drie doorvoerpunten zijn als volgt:

	Helmand	Kandahar	Uruzgan
Kabul	500	400	300
Oezbekistan	1400	1500	1300
Pakistan	1100	1000	1200

De logistieke stafafdeling heeft de opdracht een plan voor de terugtrekking op te stellen zodanig dat de totale verreden afstand door de trucks minimaal is.

Laat zien hoe het bovenstaande probleem is te formuleren als een transportprobleem, en stel het bijbehorende transporttableau op. Gebruik de zogenoemde Noord West hoek regel om een beginoplossing te vinden, en voer vervolgens aan de hand van het transporttableau iteratiestappen uit om de optimale oplossing te bepalen.

Feitenblad Optimalisering (2DD15)

Vrijdag 24 juni 2011, 9:00–12:00 uur

Het standaard LP probleem:
- De doelstelling is maximaliseren;
- Alle functionele restricties zijn gelijkheden met niet-negatieve rechterzijde coëfficiënten;
- Alle variabelen zijn niet-negatief.

Als de rechterzijde coëfficiënt negatief is, dan wordt eerst de gehele restrictie met -1 vermenigvuldigd, waardoor het teken omklapt (van $\leq$ naar $\geq$, of van $\geq$ naar $\leq$).
Iedere $\leq$-restrictie met niet-negatieve rechterzijde coëfficiënt krijgt een slack variabele.
Iedere $\geq$-restrictie met niet-negatieve rechterzijde coëfficiënt krijgt een surplus variabele.

Iedere functionele restrictie $a_i^T x = b_i$ in standaard vorm die geen slack variabele heeft, krijgt bij het bepalen van een startoplossing een kunstmatige variabele r_i.
In de big-M methode wordt een term Mr_i van de doelstellingsfunctie afgetrokken. Voor een startoplossing wordt r_i in de basis gekozen en de bijbehorende (gereduceerde) doelstellingscoëfficiën in de 0-de rij wordt 0 gemaakt.
In de 2-fasen methode wordt in fase 1 de doelstelling maximaliseren – de som van de kunstmatige variabelen. Zodra deze doelstellingsfunctie waarde 0 krijgt, worden de kunstmatige variabelen geschrapt, en wordt de oorspronkelijke doelstellingsfunctie in het tableau gezet voor fase 2. De (gereduceerde) doelstellingscoëfficiënten worden 0 gemaakt voor het starttableau.

Onbegrensdheid $\Leftarrow$ de kolom van een intredende basisvariabele heeft geen positieve getallen.
Meerdere optimale oplossingen $\Leftarrow$ er zijn niet-basisvariabelen met gereduceerde doelstellingscoëfficiënten gelijk aan 0.

Informatie in het Simplex tableau uitgaande van de situatie dat iedere functionele restrictie een slack variabele heeft:
- De gereduceerde doelstellingscoëfficiënten van de slack variabelen worden gegeven door $c_B^T B^{-1}$;
- De gereduceerde doelstellingscoëfficiënten van de overige variabelen worden gegeven door $c_B^T B^{-1} A - c^T$;
- In het bijzonder worden de gereduceerde doelstellingscoëfficiënten van de niet-basisvariabelen gegeven door $c_B^T B^{-1} A - c_{NB}^T$;
- De optimale oplossing wordt gegeven door $x_B = B^{-1} b$ en $x_{NB} = 0$;
- De optimale waarde bedraagt $c_B^T x_B = c_B^T B^{-1} b$.

Complementaire slackness relaties tussen primaal en duaal optimale oplossingen x^* en y^*:
- $y_i^*(b_i - a_i x^*) = 0$ (waar a_i de i-de rij is van A);
- $x_j^*(y^{*T} A_j - c_j) = 0$ (waar A_j de j-de kolom is van A).

De optimale duale variabele y_i is de schaduwprijs van de i-de restrictie van het primale probleem.
Als de i-de rechterzijde coëfficiënt met ϵ toeneemt, dan zal de optimale waarde met ϵy_i toenemen.

Duale Simplex iteraties worden gebruikt als van de gevonden oplossing wel alle gereduceerde doelstellingscoëfficiënten niet-negatief zijn (de corresponderende duale oplossing is toegelaten), maar de oplossing is niet toegelaten (in de rechterzijde van het Simplex tableau komen negatieve getallen voor). In de duale Simplex methode wordt eerst als uittredende variabele een basisvariabele met negatieve rechterzijde coëfficiënt gekozen. De intredende variabele wordt bepaald aan de hand van de duale minimum-ratio test: deel de gereduceerde doelstellingscoëfficiënt van een variabele door de absolute waarde van de coëfficiënt in de kolom van die variabele en in de rij van de uittredende variabele, alleen als deze coëfficiënt negatief is. Neem van al deze quotiënten degene met de minimum waarde. Dit bepaalt de intredende variabele. Voer vervolgens een duale Simplex iteratie uit.

Voor het oplossen van geheeltallige lineaire programmeringsproblemen met behulp van de branch-and-bound methode gelden de volgende criteria voor het snoeien van de boom in een knoop:
(P1) De optimale waarde van de LP-relaxatie van het sub-probleem in die knoop wordt bereikt door een toegelaten geheeltallige oplossing;
(P2) De bovengrens voor de optimale waarde van het sub-probleem in die knoop, verkregen als de optimale waarde van de LP-relaxatie, is kleiner dan de waarde van de beste tot nu toe gevonden toegelaten (geheeltallige) oplossing;
(P3) Het sub-probleem in die knoop is niet toegelaten;
(P4) (Alleen voor *knapsack* problemen) De (rest)capaciteit van de knapsack in het sub-probleem in die knoop is strikt kleiner dan het gewicht van elk van de overgebleven items.

Het 0–1 *knapsack* probleem van het selecteren van items, waarbij elk item j een gewicht a_j en een waarde c_j heeft, en de knapsack gewichtscapaciteit b heeft. Gevraagd wordt om die items te selecteren met de maximale totale waarde, waarvan het totale gewicht de capaciteit b niet overschrijdt.
De LP-relaxatie van het probleem wordt verkregen door de geheeltalligheidsresricties te laten vervallen.
Het volgende algoritme lost de LP-relaxatie van het probleem op: Orden de items naar afnemende grootte van de ratio c_j/a_j, en voeg de items in die volgorde toe aan de selectie zolang de capaciteit b niet wordt overschreden. Voor het eerste item dat niet meer geheel past, wordt bepaald welke fractie van dat item nog wel past, en deze fractie wordt geselecteerd waarmee de capaciteit wordt bereikt en het algoritme eindigt.
Afronding naar beneden van de optimale oplossing van de LP-relaxatie geeft een toegelaten (geheeltallige) oplossing.

Het *transport* probleem van het benutten van het aanbod in m punten, waar elk punt i een aanbod s_i heeft, en het vervullen van de vraag in n punten waar elke punt j een vraag d_j heeft, met $\sum_{i=1}^{m} s_i = \sum_{j=1}^{n} d_j$ en transportkosten c_{ij} tussen aanbodpunt i en vraagpunt j per eenheid product. Gevraagd wordt om de hoeveelheid product x_{ij} te bepalen die van aanbodpunt i naar vraagpunt j moet worden getransporteerd zodanig dat de totale transportkosten minimaal zijn, het aanbod volledig wordt benut, en de vraag volledig wordt vervuld. Het probleem is op te lossen aan de hand van een transporttableau, waar eerst met behulp van de Noord West hoek regel of minimale-kosten regel een toegelaten beginoplossing met $m+n-1$ basisvariabelen wordt bepaald. Vervolgens kunnen de waarden (van de duale variabelen) u_i en v_j worden bepaald. Zolang $c_{ij} - u_i - v_j < 0$ voor een bepaalde cel i, j is de oplossing te verbeteren door een ketenreactie te vinden in het transporttableau uitgaande van cell i, j, en de stroom langs de keten afwisselend te verhogen, om x_{ij} in de basis op te nemen en één van de huidige variabelen uit de basis te verwijderen.