Uitwerkingen tentamen 2DD15, 4 juli 2012

Vraag 1 - webwinkel

(a) Als we de behoefte aan ruimte voor maand i b_i noemen ($b = (4000, 1000, 3000, 5000, 2000)$) en de prijs per vierkante meter voor een ℓ-maandscontract p_ℓ (dus $p = (70, 100, 125, 145, 160)$), dan wordt het lineair programmeringsmodel:

$$\min \sum_{1 \le i \le j \le 5} x_{i,j} p_{j+1-i}$$

onder voorwaarden

$$\forall k = 1, 2, 3, 4, 5 : \sum_{1 \le i \le k} \sum_{j \ge k} x_{i,j} \ge b_k$$

met

$$\forall i, j : x_{i,j} \ge 0$$

Dit mag natuurlijk ook uitgewerkt zijn tot:
min $70(x_{1,1} + x_{2,2} + x_{3,3} + x_{4,4} + x_{5,5}) + 100(x_{1,2} + x_{2,3} + x_{3,4} + x_{4,5}) + 125(x_{1,3} + x_{2,4} + x_{3,5}) + 145(x_{1,4} + x_{2,5}) + 160(x_{1,5})$,
onder voorwaarden:
(1) $x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} + x_{1,4} + x_{1,5} \ge 4000$
(2) $x_{1,2} + x_{1,3} + x_{1,4} + x_{1,5} + x_{2,2} + x_{2,3} + x_{2,4} + x_{2,5} \ge 1000$
(3) $x_{1,3} + x_{1,4} + x_{1,5} + x_{2,3} + x_{2,4} + x_{2,5} + x_{3,3} + x_{3,4} + x_{3,5} \ge 3000$
(4) $x_{1,4} + x_{1,5} + x_{2,4} + x_{2,5} + x_{3,4} + x_{3,5} + x_{4,4} + x_{4,5} \ge 5000$
(5) $x_{1,5} + x_{2,5} + x_{3,5} + x_{4,5} + x_{5,5} \ge 2000$
en $x_{i,j} \ge 0$ voor alle (i, j), met $1 \le i \le j \le 5$.
(b) De objectfunctie correspondeert met het totaal bestede bedrag, en de k-de beperking houdt in dat de omvang van alle contracten die maand k bevatten tesamen minstens gelijk is aan de vraag in maand k. Uiteraard laten we in dit geval geen negatieve huurcontracten toe (terug-leasen).

Vraag 2: LP en twee fasen methode

(a) $\max 2x_1 + 4x_2 + 3x_3$
o.d.v. $x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 12$, en $3x_1 + 5x_2 + 3x_3 - s_2 = 24$,
met niet-negativiteitseisen $x_1, x_2, x_3, s_2 \ge 0$.
(b) introduceer artificiële variabelen a_1 en a_2 om het stelsel een oplossing te geven en minimaliseer hun waarde om een basisoplossing van het oorspronkelijke probleem te krijgen:
$\max Z = -a_1 - a_2$,
o.d.v. $x_1 + 3x_2 + 2x_3 + a_1 = 12$, en $3x_1 + 5x_2 + 3x_3 - s_2 + a_2 = 24$,
met niet-negativiteitseisen $x_1, x_2, x_3, s_2, a_1, a_2 \ge 0$.
Het starttableau is

	Z	x_1	x_2	x_3	s_2	a_1	a_2	b
Z	1	0	0	0	0	1	1	0
a_1	0	1	3	2	0	1	0	12
a_2	0	3	5	3	-1	0	1	24

Z-rij oppoetsen levert

	Z	x_1	x_2	x_3	s_2	a_1	a_2	b
Z	1	-4	-8	-5	1	0	0	-36
a_1	0	1	3	2	0	1	0	12
a_2	0	3	5	3	-1	0	1	24

x_1 in basis, a_2 eruit:

	Z	x_1	x_2	x_3	s_2	a_1	a_2	b
Z	1	0	$-4/3$	-1	$-1/3$	0	$4/3$	-4
a_1	0	0	$4/3$	1	$1/3$	1	$-1/3$	4
x_1	0	1	$5/3$	1	$-1/3$	0	$1/3$	8

x_2 in basis, a_1 eruit:

	Z	x_1	x_2	x_3	s_2	a_1	a_2	b
Z	1	0	0	1	0	1	1	0
x_2	0	0	1	$3/4$	$1/4$	$3/4$	$-1/4$	3
x_1	0	1	0	$-1/4$	$-3/4$	$-5/4$	$3/4$	3

We hebben nu een basisoplossing zonder gebruikmaking van artificiële variabelen met $x_1 = x_2 = 3$, $x_3 = 0$ en $s_2 = 0$.
(c) Elimineer a_1 en a_2 en her-introduceer de eigenlijke objectfunctie:

	Z	x_1	x_2	x_3	s_2	b
Z	1	-2	-4	-3	0	0
x_2	0	0	1	$3/4$	$1/4$	3
x_1	0	1	0	$-1/4$	$-3/4$	3

Poets z rij op:

	Z	x_1	x_2	x_3	s_2	b
Z	1	0	0	$-1/2$	$-1/2$	18
x_2	0	0	1	$3/4$	$1/4$	3
x_1	0	1	0	$-1/4$	$-3/4$	3

s_2 in basis , x_2 eruit:

	Z	x_1	x_2	x_3	s_2	b
Z	1	0	2	1	0	24
s_2	0	0	4	3	1	12
x_1	0	1	3	2	0	12

De optimale oplossing is $x_1 = 12, x_2 = 0, x_3 = 0$ met waarde -24 (voor het oorspronkelijke minimaliserings probleem).
(d) Het LP verandert van 'min' naar 'max'. We kunnen starten met het eindtableau van de eesrt fase en introduceren de omgekeerde objectfunctie. Dat betekent dat de coefficienten in de Z-rij van teken wisselen:

	Z	x_1	x_2	x_3	s_2	b
Z	1	0	0	$+1/2$	$+1/2$	-18
x_2	0	0	1	$3/4$	$1/4$	3
x_1	0	1	0	$-1/4$	$-3/4$	3

Dit tableau is meteen optimaal, met $x_1 = x_2 = 3$, $x_3 = 0$ en waarde is -18.

Vraag3: LP en dualiteit

Deze vraag werd door meesten goed beantwoord. Er zat een fout in het rechterlid ($b_3 = 20$ had $b_3 = 40$ moeten zijn). Onderdeel d is dan een oneigenlijke vraag want de huidige oplossing is niet toegelaten. Daarom kreeg iedereen voor onderdeel d het volle pond.
(a) Het duale probleem luidt:
min $30y_1 + 20y_2 + 20y_3$, o.d.v.
$y_1 + 2y_2 \geq \frac{1}{2}$; $y_1 + y_2 + y_3 \geq 3$; en $y_1 - y_2 + y_3 \geq 1$,
onder niet-negativiteitseisen $y_1, y_2, y_3 \geq 0$.

(b) Af te lezen is de optimale oplossing van het LP: $x_1 = 0, x_2 = 25, x_3 = 5$; en de optimale oplossing van het duale probleem is dan $y_1 = 2, y_2 = 1, y_3 = 0$.
(c) Verandering van het rechterlid van $(30, 20, 20)$ naar $(30 + \Delta, 20, 20)$ zou een verandering van de basis oplossing $(5, 25, 15)$ naar $(5, 25, 15) + \Delta(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ geven. Die blijft niet-negatief voor $-10 \leq \Delta \leq 30$.
(d) introductie van x_4 laat de huidige oplossing (met $x_4 = 0$) optimaal blijven wanneer $-c_4 + \sum_i y_i \cdot a_{i4} = -2 + 1 \cdot y_1 + (-3) \cdot y_2 + 5 \cdot y_3 \geq 0$. Maar deze uitdrukking heeft een waarde $-2 - 2 + 3 + 0 = -1 < 0$ dus die vlieger gaat niet op.

Vraag 4: branch en bound, multiple knapzak

De LP-relaxaties van het gegeven probleem zijn simpel op te lossen door zoveel mogelijk van item 2 mee te nemen aangezien de opbrengst-lasten ratios 1 respectievelijk 12/11 zijn.
LP(1):oplossing $(0, \frac{59}{11})$, met waarde $64\frac{4}{11}$; naar beneden afronden van (x_1, x_2) geeft toegelaten oplossing $(0, 5)$ met waarde 60; branch op variabele x_2 naar
LP(2), met extra eis $x_2 \leq 5$ en
LP(3), met extra eis $x_2 \geq 6$;

LP(3) heeft geen toegelaten oplossing; snoeien (ii) ;
LP(2) heeft oplossing $(\frac{4}{7}, 5)$, met waarde 64; branch op varaiabele x_1 naar
LP(4) met extra eisen $x_1 \leq 0, x_2 \leq 5$ en naar
LP(5) met extra eisen $x_1 \geq 1, x_5 \leq 5$.

LP(4) heeft integer oplossing $(0, 5)$, met waarde 60; snoeien op grond van (i);
LP(5) heeft oplossing $(1, \frac{52}{11})$, met waarde $59 + \frac{52}{11} = 63\frac{8}{11}$; branch op variable x_2 naar
LP(6) met extra eisen $x_1 \geq 1, 5 \leq x_2 \leq 5$; en naar
LP(7) met extra eisen $x_1 \geq 1, x_2 \leq 4$.

LP(6) heeft geen oplossing, snoeien (ii);
LP(7) heeft oplossing $(\frac{15}{7}, 4)$, met waarde 63. Branch op variabele x_1 naar
LP(8) met extra eisen $1 \leq x_1 \leq 2, x_2 \leq 4$, en naar
LP(9) met extra eisen $x_1 \geq 3, x_2 \leq 4$.

LP(8) heeft integer oplossing $(2, 4)$ met waarde 62: update van beste oplossing tot nu toe; en snoeien op basis van (i);
LP(9) heeft oplossing $(3, \frac{38}{11})$, met waarde $59 + \frac{38}{11} = 62\frac{5}{11}$. Aangezien de objectfunctie

geheeltallige coefficienten heeft kan de beste geheeltallige oplossing onder de voorwaarden van LP(9) hoogstens een waarde 62 behalen en kunnen we dus snoeien op basis van (iii).
(b) Een optimale oplossing is dus (2,4) met waarde 62.

Vraag 5: transport probleem

Er is gewezen op de noodzaak dat een BASIS oplossing voldoende elementen moet hebben, desnoods een paar met waarde nul.
(a) $T = 9 + 3 + 6 - (5 + 4 + 5) = 18 - 14 = 4$.
(b) De NoordWest regel geeft als basis oplossing:

$$\begin{array}{cccc|c} 5 & 4 & \cdot & \cdot & 9 \\ \cdot & 0 & 3 & \cdot & 3 \\ \cdot & \cdot & 2 & 4 & 6 \\ \hline 5 & 4 & 5 & 4 & 18 \end{array}$$

(c) Met de elementen (i, j) gekozen in de basis $\mathcal{B}$ kiezen we u_i en v_j zodanig dat $u_i + v_j = c_{i,j}$, voor $(i, j) \in \mathcal{B}$. We kiezen naar believen een van deze waarden gelijk aan nul. In dit geval $u_1 = 0$

$$\begin{array}{ccccc|c} c_{ij} & & & & & u_i \\ & 8 & 9 & \cdot & \cdot & 0 \\ & \cdot & 1 & 13 & \cdot & -8 \\ & \cdot & \cdot & 5 & 1 & -16 \\ \hline v_j & 8 & 9 & 21 & 17 & \end{array}$$

Merk op dat $c_{14} = 6 < u_1 + v_4 = 0 + 17$. Verbeter langs de keten $(1, 4), (3, 4), (3, 3), (2, 3), (2, 2), (1, 2)$. De ruimte is 3 eenheden. De nieuwe basis krijgen we door $(1, 4)$ toe te voegen en $(2, 3)$ weg te halen:

$$\begin{array}{cccc|c} 5 & 1 & \cdot & 3 & 9 \\ \cdot & 3 & \cdot & \cdot & 3 \\ \cdot & \cdot & 5 & 1 & 6 \\ \hline 5 & 4 & 5 & 4 & 18 \end{array}$$

Bepaal opnieuw u en v:

$$\begin{array}{ccccc|c} c_{ij} & & & & & u_i \\ & 8 & 9 & \cdot & 6 & 0 \\ & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & -8 \\ & \cdot & \cdot & 5 & 1 & -5 \\ \hline v_j & 8 & 9 & 10 & 6 & \end{array}$$

De matrix gegeven door $c_{ij} - u_i - v_j$ wordt dan gegeven door

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 11 & 0 \\ 22 & 0 & 11 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

dus is de oplossing die we hebben gevonden optimaal.
(d) de kosten zijn 96 $(= 8{*}5 + 9{*}4 + 10{*}5 + 6{*}4 - 8{*}3 - 5{*}6 = 5{*}8 + 1{*}9 + 3{*}6 + 3{*}1 + 5{*}5 + 1{*}1)$