Technische Universiteit Eindhoven – Faculteit Wiskunde & Informatica

## Tentamen Optimalisering (2DD15)

Vrijdag 24 juni 2011, 9:00–12:00 uur

### Beknopte antwoorden

**Opgave 1** [10 pt]
Het Simplex tableau dat hoort bij de startoplossing met $s_1$, $s_2$ en $s_3$ als basisvariabelen is:

| | $Z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Z$ | 1 | $-3$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $(s_1)$ | 0 | 6 | $-1$ | $-1$ | 1 | 0 | 0 | 28 |
| $(s_2)$ | 0 | 6 | 1 | 5 | 0 | 1 | 0 | 34 |
| $(s_3)$ | 0 | 4 | 4 | 4 | 0 | 0 | 1 | 36 |

Na het uitvoeren van één verbeteringsstap (waar wordt gekozen om $x_1$ in de basis op te nemen en $s_1$ uit de basis te verwijderen) wordt het volgende Simplex tableau verkregen:

| | $Z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Z$ | 1 | 0 | $-2\frac{1}{2}$ | $-1\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | 14 |
| $(x_1)$ | 0 | 1 | $-\frac{1}{6}$ | $-\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | 0 | 0 | $4\frac{2}{3}$ |
| $(s_2)$ | 0 | 0 | 2 | 6 | $-1$ | 1 | 0 | 6 |
| $(s_3)$ | 0 | 0 | $4\frac{2}{3}$ | $4\frac{2}{3}$ | $-\frac{2}{3}$ | 0 | 1 | $17\frac{1}{3}$ |

Er mag ook voor worden gekozen $x_2$ in de basis op te nemen (en in dat geval $s_3$ uit de basis te verwijderen) of $x_3$ in de basis op te nemen (en in dat geval $s_2$ uit de basis te verwijderen).

**Opgave 2** [10 pt]
De matrix $M$ is af te lezen uit de kolommen onder de slack variabelen:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{9}{20} \\ 0 & 1 & -1\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{20} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} \end{bmatrix}$$

De ontbrekende getallen worden verkregen door de overeenkomstige kolommen in het initïele Simplex tableau voor te vermenigvuldigen met de matrix $M$, wat resulteert in:

| | $Z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Z$ | 1 | 0 | 0 | $\frac{9}{5}$ | 0 | $\frac{1}{5}$ | $\frac{9}{20}$ | 23 |
| $(s_1)$ | 0 | 0 | 0 | $-5\frac{3}{5}$ | 1 | $-1\frac{2}{5}$ | $\frac{3}{5}$ | 2 |
| $(x_1)$ | 0 | 1 | 0 | $\frac{4}{5}$ | 0 | $\frac{1}{5}$ | $-\frac{1}{20}$ | 5 |
| $(x_2)$ | 0 | 0 | 1 | $\frac{1}{5}$ | 0 | $-\frac{1}{5}$ | $\frac{3}{10}$ | 4 |

**Opgave 3** [10 pt]
Wanneer de rechterzijde van de tweede functionele restrictie wordt veranderd in $34+\Delta$, resulteert het voorvermenigvuldigen met de matrix $M$ in een nieuwe vector van rechterzijde coëfficiënten

(in de laatste drie componentent):

$$M \begin{bmatrix} 0 \\ 28 \\ 34+\Delta \\ 36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23+\frac{1}{5}\Delta \\ 2-1\frac{2}{5}\Delta \\ 5-\frac{1}{5}\Delta \\ 4-\frac{1}{5}\Delta \end{bmatrix}$$

Wil de oplossing met $s_1$, $x_1$ en $x_2$ als basisvariabelen optimaal blijven, dan moet deze vector niet-negatief zijn, wat vereist $\Delta \in [-25, \frac{10}{7}]$.

**Opgave 4** [10 pt]
Het bijbehorende duale probleem is:

$$\begin{array}{rrcrcrcrcl} \text{minimaliseer} & W & = & 28y_1 & + & 34y_2 & + & 36y_3 & & \\ \text{onder de voorwaarden} & & & 6y_1 & + & 6y_2 & + & 4y_3 & \geq & 3 \\ & & & -y_1 & + & y_2 & + & 4y_3 & \geq & 2 \\ & & & & & 5y_2 & + & 4y_3 & \geq & 0 \\ & & & & & y_1 \geq 0 & & & & \end{array}$$

De optimale oplossing van het duale probleem is $y_1^* = 0$, $y_2^* = \frac{1}{5}$, $y_3^* = \frac{9}{20}$. Deze komt overeen met de optimale duale oplossing van het LP probleem in Opgave 1, die is af te lezen als de gereduceerde kostencoëfficiënten van de slack variabelen in het eindtableau in Opgave 3. Dit volgt uit het feit dat de bovenstaande oplossing voldoet aan de voorwaarden van het duale probleem, en een doelfunctiewaarde 23 geeft, terwijl de optimale waarde van het duale probleem gelijk is aan die van het primale probleem, die op haar beurt niet hoger kan zijn dan 23, namelijk die van het LP probleem in Opgave 1.

**Opgave 5** [20 pt]
Introduceer de 0-1 beslissingsvariabelen $x_{ij}$ om aan te geven dat produkt $j$ wordt gefabriceerd op lokatie $i$, 0-1 beslissingsvariabelen $y_i$ om aan te geven dat lokatie $i$ in bedrijf wordt genomen, en de 0-1 beslissingsvariabele $z$ om aan te geven dat zowel lokatie A als lokatie C in bedrijf worden genomen. Zij $e_{ij}$ de netto winst per eenheid voor produkt $j$ op lokatie $i$ (zoals gegeven in de tabel), $c_i$ de vaste jaarlijkse operationele kosten voor lokatie $i$, en $d_j$ het verwachte jaarlijkse afzetvolume voor produkt $j$. Het bovenstaande probleem is dan te formuleren als het volgende 0-1 lineair programmeringsprobleem:

$$\begin{array}{rrcll} \text{minimaliseer} & \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 d_j e_{ij} x_{ij} & - & \sum_{i=1}^4 c_i y_i & + \quad 2000000y_1 + 2000000y_3 - 1000000z \\ \text{onder de voorwaarden} & x_{ij} & \leq & y_i & i,j = 1,\ldots,4 \\ & \sum_{i=1}^4 x_{ij} & \leq & 1 & j = 1,\ldots,4 \\ & \sum_{i=1}^4 (x_{i2} + x_{i4}) & \leq & 1 & \\ & y_1 + y_3 - z & \leq & 1 & \\ & x_{ij} & \in & \{0,1\} & i,j = 1,\ldots,4 \\ & y_i & \in & \{0,1\} & i = 1,\ldots,4 \\ & z & \in & \{0,1\} & \end{array}$$

**Opgave 6** [20 pt]
Het *knapsack* probleem bestaat uit het maximaliseren van $50x_1 + 60x_2 + 80x_3 + 120x_4 + 130x_5$ onder de voorwaarden $200x_1 + 250x_2 + 400x_3 + 550x_4 + 700x_5 \leq 950 = 1450 - 500$ en $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \{0,1\}$, waar $x_i$ aangeeft of vestiging $i$ wordt gesloten.

De optimale oplossing is $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, $x_5 = 0$ (dus om de vestigingen in Casper en Great Falls te sluiten).

Er zijn zoveel verschillende mogelijke manieren om de *branch-and-bound* methode uit te voeren, dat het weinig zin heeft hier een willekeurige specifieke manier uit te werken.

**Opgave 7** [20 pt]
Zij $c_{ij}$ de afstand van legerbasis $i$ naar doorvoerpunt $j$, $d_i$ de vereiste afvoer van legerbasis $i$, en $s_j$ de beschikbare capaciteit in doorvoerpunt $j$. Introduceer de beslissingsvariabelen $x_{ij}$ om het aantal truckladingen aan te geven dat wordt vervoerd van legerbasis $i$ naar doorvoerpunt $j$.

Het bovenstaande probleem is dan te formuleren als het volgende transportprobleem:

$$\begin{array}{rrcll} \text{maximaliseer} & \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} c_{ij}x_{ij} & & & \\ \text{onder de voorwaarden} & \sum_{j=1}^{3} x_{ij} & = & d_i & i = 1,2,3 \\ & \sum_{i=1}^{3} x_{ij} & = & s_j & j = 1,2,3 \\ & x_{ij} & \geq & 0 & \end{array}$$

De Noord West hoek regel levert als beginoplossing $x_{11} = 200$, $x_{21} = 300$, $x_{22} = 100$, $x_{32} = 500$, $x_{33} = 300$.

De optimale oplossing is $x_{13} = 200$, $x_{21} = 300$, $x_{23} = 100$, $x_{31} = 200$, $x_{32} = 600$.

Het is ook mogelijk om de rol van de $d_i$'s en $s_j$'s te verwisselen, wat neerkomt op het verwisselen van de indices $i$ en $j$ in de bovenstaande oplossingen.