2DD50: Tentamen

- **Tentamen:** 26 januari 2016
- **Hertentamen:** 5 april 2016

- Bij het tentamen mag een eenvoudige (niet grafische; niet programmeerbare) **rekenmachine** meegenomen worden, en 2 tweezijdige A4-tjes met daarop **handgeschreven aantekeningen** die men nodig denkt te hebben bij het maken van het tentamen
- geen boeken, geen kopieën, geen print-outs
- geen cell phones

Toetsen

Het tentamen toetst het exacte begrip van de beschreven methoden en de vaardigheid in de toepassing van deze methoden op concrete voorbeelden.

Van de student wordt een **duidelijke en leesbare** oplossing verwacht. De puntentelling is gebaseerd op de volgende regels.

- We only grade up to the first mistake
- Zero points for anything you write after the first mistake
- Zero points for writing wrong solutions
- Zero points for solving questions that we did not ask
- Zero points if you submit two different solutions for one problem

Tentamenvoorbereiding (1)

Tentamenvragen kunnen o.a. in volgende categoriën vallen:

- een woordelijke beschrijving van een ‘praktijk’ probleem vertalen in een LP formulering;
- de Big-M en de 2-fasen methode toepassen om een startoplossing van een LP probleem te vinden;
- een Simplex (tussen)tableau interpreteren;
- een Simplex iteratie aangeven;
- het duale LP probleem opstellen voor een gegeven primale LP probleem;
- informatie over de optimale oplossing van het duale probleem afleiden uit een Simplex tableau;

Tentamenvoorbereiding (2)

Tentamenvragen kunnen o.a. in volgende categoriën vallen:

- een eenvoudig transportprobleem oplossen;
- een eenvoudig toewijzingsprobleem oplossen;
- een woordelijke beschrijving van een 'praktijk' probleem vertalen in een dynamisch programmeringsprobleem;
- een eenvoudig dynamisch programmeringsprobleem oplossen

Voorbeelden tentamenopgaven (1a)

Beschouw het volgende lineaire programma (het zogenoemde **originele LP**):

$$
\begin{array}{lrrrrrrcr}
\min Z = & -x_1 & +2x_2 & +3x_3 & -x_4 & -x_5 & +2x_6 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & +2x_2 & +2x_3 & -x_4 & -x_5 & & = & 12 \\
 & x_1 & +2x_2 & +x_3 & -x_4 & -2x_5 & -x_6 & = & 18 \\
 & 3x_1 & +6x_2 & +2x_3 & -x_4 & -3x_5 & & = & 24
\end{array}
$$

$$
\text{met} \qquad x_1, x_2, x_3 \geq 0, \quad x_4, x_5, x_6 \leq 0
$$

(a) Breng het lineair programma LP in standaard vorm met gelijkheden (maximaliseren; slack- en surplusvariabelen; etc.).

(b) Zet het initiële simplex tableau op voor de **eerste fase** van de twee-fasen methode (met drie artificiële variabelen a_1, a_2, a_3; etc.).

Voorbeelden tentamenopgaven (1b)

Als we het simplex algoritme toepassen op het tableau gevonden in (b), dan zal na enkele iteraties de eerste fase **eindigen** met het volgende tableau. Merk op dat de twaalf hokjes □ verborgen getallen representeren, en dat de variabelen x_4', x_5', x_6' de negatieve tegenhangers zijn van variabelen x_4, x_5, x_6; dat wil zeggen, $x_4' = -x_4$ en $x_5' = -x_5$ en $x_6' = -x_6$.

	Z	x_1	x_2	x_3	x_4'	x_5'	x_6'	a_1	a_2	a_3	b
Z	1	□	□	0	0	0	0	1	1	1	□
x_3	0	□	□	1	1/2	0	0	3/4	0	-1/4	□
x_6'	0	□	□	0	1/2	1	1	-1/4	1	-1/4	□
x_2	0	□	□	0	0	1/2	0	-1/4	0	1/4	□

Voorbeelden tentamenopgaven (1c)

(c) [4 punten] Geef de onderliggende 4×4 matrix M voor het gegeven tableau. Bepaal de twaalf verborgen getallen in het tableau **rechtstreeks** met behulp van de matrix M en het initiële tableau gevonden in (b). Geef uw berekeningen weer.

(d) [4 punten] Zet het initiële tableau op voor de **tweede fase** van de twee-fasen methode vanuit het tableau gevonden in (c). Voer één stap van de simplex algoritme uit. Geef duidelijk aan welk pivot element u gebruikt.

(e) [2 punten] Geef een optimale oplossing $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ en de optimale objectwaarde van het oorspronkelijke lineaire programma (LP.1).

Voorbeelden tentamenopgaven (2a)

Een team speelt drie wedstrijden in een tournooi. In elke wedstrijd kunnen 0, 1 of 3 punten verdiend worden. Het team kan kiezen uit drie verschillende speelstijlen in elke wedstrijd. Voor iedere wedstrijd i en speelstijl is de inspanning c_i gegeven die nodig is voor die speelstijl en het aantal punten p_i dat met die inspanning naar verwachting gehaald wordt. De inspanning die het team kan leveren over de drie wedstrijden is in totaal 8. Welke speelstijl moet het team in elke wedstrijd kiezen om te zorgen dat het totaal aantal punten dat naar verwachting gehaald wordt zo groot mogelijk is?

	Wedstrijd 1		Wedstrijd 2		Wedstrijd 3	
Speelstijl	c_1	p_1	c_2	p_2	c_3	p_3
1	1	0	1	0	1	0
2	2	1	2	1	3	1
3	4	3	5	3	6	3

Voorbeelden tentamenopgaven (2b)

Los dit probleem op door middel van dynamisch programmeren.
Je kunt kiezen of je voorwaartse of achterwaartse recursie gebruikt.

(a) Geef aan wat de stappen, de toestanden en de keuzemogelijkheden zijn.

(b) Construeer een tabel voor elke stap. Maak in die tabel een rij voor iedere toestand. Geef in elke rij aan wat voor iedere keuzemogelijkheid het aantal verwachte punten is, wat de optimale keuzemogelijkheden zijn en wat het optimaal te behalen aantal verwachte punten is.

Solution sketch (2c)

(a) Geef aan wat de stappen, de toestanden en de keuzemogelijkheden zijn.

- Stap (stage) j: wedstrijd j
- Toestand (state) s_j: total amount of inspanning invested into the first j matches $1, \ldots, j$
- Keuzemogelijkhed (choice) k_j: speelstijl k_j chosen for match j

Solution sketch (2d)

(b) Los dit probleem op door middel van dynamisch programmeren.

Main definition: $f_j(s_j)$ is the optimal expected number of points in the first j matches with a total amount s_j of inspanning

Recursion formulas:

$$f_1(s_1) \;=\; \max_{k_1 : c_1(k_1) \leq s_1} p_1(k_1)$$

$$f_j(s_j) \;=\; \max_{k_j : c_j(k_j) \leq s_j} p_j(k_j) \;+\; f_{j-1}(s_j - c_j(k_j)) \qquad \text{for } j = 2, 3$$

Solution sketch (2e)

Stap 1

	expected # of pts with speelstijl k_1 in match 1				
s_1	$k_1 = 1$	$k_1 = 2$	$k_1 = 3$	k_1^*	$f_1(s_1)$
0	_	_	_	_	_
1	0	_	_	1	0
2	0	1	_	2	1
3	0	1	_	2	1
4	0	1	3	3	3
5	0	1	3	3	3
6	0	1	3	3	3
7	0	1	3	3	3
8	0	1	3	3	3

Solution sketch (2f)

Stap 2

	expected # of pts with speelstijl k_2 in match 2				
s_2	$k_2 = 1$	$k_2 = 2$	$k_2 = 3$	k_2^*	$f_2(s_2)$
2	0+0	_	_	1	0
3	0+1	1+0	_	1 or 2	1
4	0+1	1+1	_	2	2
5	0+3	1+1	_	1	3
6	0+3	1+3	3+0	2	4
7	0+3	1+3	3+1	2 or 3	4
8	0+3	1+3	3+1	2 or 3	4

Solution sketch (2f)

Stap 2

s_2	expected # of pts with speelstijl k_2 in match 2 $k_2 = 1$	$k_2 = 2$	$k_2 = 3$	k_2^*	$f_2(s_2)$
2	0+0	_	_	1	0
3	0+1	1+0	_	1 or 2	1
4	0+1	1+1	_	2	2
5	0+3	1+1	_	1	3
6	0+3	1+3	3+0	2	4
7	0+3	1+3	3+1	2 or 3	4
8	0+3	1+3	3+1	2 or 3	4

Stap 3

s_3	expected # of pts with speelstijl k_3 in match 3 $k_3 = 1$	$k_3 = 2$	$k_3 = 3$	k_3^*	$f_3(s_3)$
8	0+4	1+3	3+0	1 or 2	4

Voorbeelden tentamenopgaven (3)

De Nederlandse overheid moet 11 miljard bezuinigen. Er zijn zes maatregelen die genomen kunnen worden om deze bezuinigen te bewerkstelligen. Deze maatregelen leveren respectievelijk 6, 5, 2, 8 en 3 miljard aan bezuinigingen op. Elke maatregel heeft echter een negatief effect op de economie die resulteert in een daling van het bruto binnenlands product (bbp). De zes maatregelen zorgen voor een afname van het bbp van respectievelijk 4, 1, 3, 7 en 1 miljard. De regering wil weten welke bezuinigingsmaatregelen ze moet treffen zodanig dat er tenminste 11 miljard bezuinigd wordt en de daling van het bbp zo klein mogelijk is.

Los dit probleem op door middel van dynamisch programmeren. (Geef aan wat de stappen, de toestanden en de keuzemogelijkheden zijn. Construeer een tabel voor elke stap. Etc.)

Voorbeelden tentamenopgaven (4)

Beschouw het volgende transportprobleem met drie producenten en vier consumenten:

8	9	21	6	9
22	1	13	9	3
3	4	5	1	6
5	4	5	T	

(a) Bepaal de waarde van T waarvoor de totale vraag gelijk is aan het totale aanbod. Vanaf nu werk je met deze waarde van T.

(b) Vind een toegelaten basis oplossing door de **Noord-West hoek** regel te gebruiken.

(c) Bepaal een optimale oplossing door de simplex methode voor transportproblemen toe te passen. Begin met de toegelaten basis oplossing die je in (b) gevonden hebt.

(d) Wat zijn de kosten van de optimale oplossing?

Voorbeelden tentamenopgaven (5a)

Beschouw het volgende transportprobleem met drie producenten en vier consumenten:

$$\begin{array}{cccc|c} 4 & 4 & 8 & 1 & 6 \\ 9 & 5 & 5 & 5 & 8 \\ 1 & 8 & 8 & 8 & 3 \\ \hline 5 & 5 & 4 & 3 & \end{array}$$

(a) [2 punten] Herschrijf het transportprobleem als een Lineair Programma (Benoem de objectfunctie en alle beperkingen.)

(b) [3 punten] Bereken een toegelaten (start) oplossing voor het transportprobleem, hetzij door toepassing van deel 1 van de twee-fasen methode, hetzij door de Noord-West-hoek regel te gebruiken.

Voorbeelden tentamenopgaven (5b)

(c) [6 punten] Bereken een optimale oplossing voor het transportprobleem, hetzij door het tweede deel van de twee-fasen methode toe te passen, hetzij door gebruik te maken van het Transportation Simplex algoritme. Start vanuit de oplossing gevonden in (b) en geef alle tussenstappen weer.

(d) [2 punten] Formuleer het duale LP voor het LP gevonden in (a).

(e) [2 punten] Geef een optimale oplossing en oplossingswaarde voor het duale probleem.

Voorbeelden tentamenopgaven (6a)

Beschouw het volgende lineaire programma met 8 vrije variabelen en met 16 ongelijkheiden (ten behoeve van de leesbaarheid zijn de ongelijkheiden opgesteld in een 4×4 patroon):

$$\max Z = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + v_1 + v_2 + v_3 + v_4$$

$$\begin{array}{lllll}
\text{s.t.} & u_1 + v_1 \leq 7 & u_1 + v_2 \leq 4 & u_1 + v_3 \leq 8 & u_1 + v_4 \leq 4 \\
& u_2 + v_1 \leq 5 & u_2 + v_2 \leq 2 & u_2 + v_3 \leq 6 & u_2 + v_4 \leq 2 \\
& u_3 + v_1 \leq 6 & u_3 + v_2 \leq 3 & u_3 + v_3 \leq 7 & u_3 + v_4 \leq 3 \\
& u_4 + v_1 \leq 2 & u_4 + v_2 \leq 0 & u_4 + v_3 \leq 4 & u_4 + v_4 \leq 0
\end{array}$$

$$\text{met} \quad u_1, u_2, u_3, u_4, \; v_1, v_2, v_3, v_4 \quad \text{vrij}$$

We gaan het lineaire programma dualiseren. Voor elke ongelijkheid met linkerzijde $u_i + v_j$ introduceren we een corresponderende duale variabele $x_{i,j}$ (waarbij $1 \leq i \leq 4$ en $1 \leq j \leq 4$).

Voorbeelden tentamenopgaven (6b)

(a) [5 punten] Leg uit waarom het resulterende duale programma (LP.3) een toewijzingsprobleem is. Geef de volledige formulering van dit toewijzingsprobleem.

(b) [4 punten] Bereken een toegelaten oplossing voor het toewijzingsprobleem (LP.3) door middel van de Noord-West-hoek regel. Laat alle stappen zien.

(c) [4 punten] Los het toewijzingsprobleem (LP.3) op door middel van het transport simplex algoritme. Start vanuit de toegelaten oplossing gevonden in (b) en geef alle stappen weer.

(d) [2 punten] Geef een optimale oplossing en een bijbehorende optimale objectwaarde voor het primale lineaire programma (LP.2).