Stochastic performance modelling (2WB60)

Instruction week 7, 25 March 2016

Exercise 1. (Opgave 2 tentamen 5CC80 januari 2007)
Twee soorten jobs worden door één processor behandeld. Stel dat de processor slechts één job tegelijk kan behandelen. Type-i jobs arriveren volgens een Poisson proces met intensiteit $\lambda_i = i$, $i = 1, 2$. Bedieningstijden van type-i jobs zijn exponentieel verdeeld, met gemiddelde $1/\mu$, $i = 1, 2$. Alle aankomstintervallen en bedieningstijden zijn onafhankelijk.

(a) Wat is de kans dat de eerste twee arriverende jobs beide van type 2 zijn?

(b) Als op tijdstip 0 slechts één klant aanwezig is, namelijk van type 2, wat is dan de kans dat deze job afgewerkt is voordat een type-1 job is gearriveerd?

(c) Stel dat de processor alle jobs in volgorde van aankomst afhandelt, ongeacht het type. Zij $X_i(t)$ het aantal jobs van type i, $i = 1, 2$, en $X(t) = X_1(t) + X_2(t)$. Beredeneer dat $\{X(t),\ t \geq 0\}$ een Markov proces is. Zou dat ook gelden als de bedieningstijden van type-1 jobs een ander gemiddelde hebben dan de bedieningstijden van type-2 jobs? Verklaar uw antwoord.

(d) Geef aan voor welke waarden van μ de evenwichtsverdeling van het totale aantal jobs in het systeem bestaat, en bepaal deze evenwichtsverdeling.

(e) Stel nu dat type-1 jobs *pre-emptieve* prioriteit hebben boven jobs van type 2. Bereken de gemiddelde verblijftijd van jobs van type 1, door eerst het gemiddelde aantal aanwezige type-1 jobs te bepalen.

Answer.

(a) De kans dat een type-2 job eerder aankomt dan een type-1 job is $\lambda_2/(\lambda_1 + \lambda_2) = 2/3$. De kans dat de eerste twee arriverende jobs van type 2 zijn, is, op basis van geheugenloosheid, $(2/3)^2 = 4/9$.

(b) De kans dat een type-2 job afgewerkt is voordat een type-1 job arriveert, is $\mu/(\mu + \lambda_1)$.

(c) $\{X(t),\ t \geq 0\}$ is een Markov proces met toestandsruimte $\{0, 1, \ldots\}$, transities $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ van toestand i naar $i + 1$ voor $i = 0, 1, \ldots$ en transities μ van toestand i naar $i - 1$ voor $i = 1, 2, \ldots$. Als type-1 jobs een ander gemiddelde bedieningsduur hebben, dan moet in de toestandsruimte worden opgenomen welk type job in bediening is en de precieze volgorde van klanten in de wachtrij. Dus dan zou $\{X(t),\ t \geq 0\}$ geen Markov proces zijn.

(d) In totaal arriveren er $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = 3$ jobs per tijdseenheid. De processor bedient μ jobs per tijdseenheid. We vereisen dus dat $\mu > \lambda = 3$. Het wachtrijmodel is een $M/M/1$ model met evenwichtsverdeling $p_n = (1 - \rho)\rho^n$ waarbij $p_n = \lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(X(t) = n)$ en $\rho = \lambda/\mu$.

(e) Voor een type-1 job bestaat een type-2 job niet, want een type-1 job hoeft nooit te wachten op een type-2 job. Voor type-1 jobs is het wachtrijmodel dus een $M/M/1$ model met aankomstintensiteit λ_1 en bedieningsintensiteit μ (dus zonder type-2 klanten). Definieer $\rho_1 = \lambda_1/\mu$ zodat de evenwichtsverdeling van het aantal type-1 jobs in het systeem gegeven wordt door $p_n = (1-\rho_1)\rho_1^n$. Het gemiddeld aantal type-1 jobs in het systeem volgt dan door

$$\mathbb{E}[L_1] = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n = (1-\rho_1)\sum_{n=0}^{\infty} n\rho_1^n = \rho_1/(1-\rho_1).$$

De gemiddelde verblijftijd bepalen we met behulp van de wet van Little, namelijk $\mathbb{E}[S_1] = \mathbb{E}[L_1]/\lambda_1$.

Exercise 2. (Opgave 3 tentamen 5CC80 januari 2007)
Beschouw het $M/E_2/1$ wachtrijmodel, met aankomstintensiteit λ en dichtheid van de bedieningstijden $\mu^2 t\mathrm{e}^{-\mu t}$, $t > 0$, en met belasting $\rho = 2\lambda/\mu < 1$.

(a) Elke bedieningstijd bestaat uit twee onafhankelijke exponentieel verdeelde *bedieningsfasen*, elk met verwachting $1/\mu$. Zij $Y(t)$ het aantal in het systeem aanwezige bedieningsfasen op tijdstip t. Beredeneer dat $\{Y(t),\ t \geq 0\}$ een niet-reduceerbaar en positief recurrent Markov proces is.

(b) Teken het toestandstransitiediagram (*transition rate diagram*) van dit Markov proces, en stel de vergelijkingen (*balance equations*) voor de evenwichtsverdeling van het Markov proces op.

(c) Ga na dat de oplossing van dit stelsel van de volgende vorm is: $p_n = C_1 q_1^n + C_2 q_2^n$, $n = 0, 1, \ldots$, waarbij $p_n = \lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(Y(t) = n)$. U hoeft de constanten C_i en q_i niet uit te rekenen. U hoeft ook niet te laten zien dat de q_i kleiner dan 1 zijn. (Deze opgave is wat lastiger.)

(d) Hoe is uit de gevonden oplossing de evenwichtsverdeling te vinden van het aantal klanten in het $M/E_2/1$ wachtrijmodel op een willekeurig tijdstip?

(e) Beredeneer dat die laatste kansverdeling gelijk is aan de kansverdeling van het aantal klanten in dit $M/E_2/1$ wachtrijmodel onmiddellijk na het vertrek van een klant.

Answer.

(a) De toestandsruimte is $\{0, 1, 2, \ldots\}$. Vanuit elke toestand in de toestandsruimte kun je elke andere toestand bereiken. Het Markov proces is één communicerende klasse en dus niet-reduceerbaar. Aangezien $\rho < 1$, is de drift richting de oorsprong groter dan de drift weg van de oorsprong en dus is het Markov proces positief recurrent.

(b) Transities: van i naar $i+2$ met intensiteit λ en van i naar $i-1$ met intensiteit μ. De evenwichtsvergelijkingen zijn

$$\begin{aligned}
\lambda p_0 &= \mu p_1, \\
(\lambda+\mu)p_1 &= \mu p_2, \\
(\lambda+\mu)p_n &= \lambda p_{n-2} + \mu p_{n+1}, \quad n \geq 2.
\end{aligned}$$

(c) Door $p_n = q^n$ te substitueren in de derde evenwichtsverlijking en te delen door q^{n-2} krijgen we de wortels q_1 en q_2 (en de "niet nuttige" wortel $q_3 = 1$) die voldoen aan deze vergelijking. We maken een lineaire combinatie van de twee oplossingen, zodat $p_n = C_1 q_1^n + C_2 q_2^n$, waarbij C_1 en C_2 volgen van de vergelijking in toestand 0 en de normalisatie conditie.

(d) Laat r_n de evenwichtskans zijn dat er n klanten in het systeem zijn op een willekeurig tijdstip. Dan $r_0 = p_0$ en

$$\begin{aligned} r_n &= p_{2n-1} + p_{2n} = C_1 q_1^{2n-1} + C_2 q_2^{2n-1} + C_1 q_1^{2n} + C_2 q_2^{2n} \\ &= C_1(1+q_1)q_1^{2n-1} + C_2(1+q_2)q_2^{2n-1}. \end{aligned}$$

(e) Laat a_n (d_n) de kans zijn dat bij aankomst (vertrek) van een job er n klanten in het systeem zijn, exclusief de aankomende (vertrekkende) job. We hebben $a_n = r_n$ op basis van PASTA en voor $M/G/1$ wachtrijen geldt er dat $a_n = d_n$ en dus $d_n = r_n$.

Exercise 3. Consider an $M/E_2/s/s$ queue (Erlang loss system). Customers arrive according to a Poisson process with intensity λ, there are s servers and no waiting room. When a customer arrives who finds all servers occupied, he will immediately leave the system. The service times of customers are i.i.d.; they are the sum of two independent, exponential phases with rates μ_1 and μ_2. Let $p(n_1, n_2)$ be the steady-state probability of having n_1 customers in phase 1 and n_2 customers in phase 2.

(a) Determine the balance equations for $p(n_1, n_2)$, $0 \le n_1 + n_2 \le s$.

(b) Show that

$$p(n_1, n_2) = C \frac{(\lambda/\mu_1)^{n_1}}{n_1!} \frac{(\lambda/\mu_2)^{n_2}}{n_2!}, \quad 0 \le n_1 + n_2 \le s,$$

with C a normalising constant.

(c) Show that the steady-state distribution of the number of customers in the system (sum of numbers in both phases) is given by

$$p(n \text{ customers}) = \Big(\sum_{k=0}^{s} \frac{(\lambda/\mu)^k}{k!} \Big)^{-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, \ldots, s,$$

with $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}$.
Hint. Use Newton's binomium.

(d) Consider a machine-repair model with s servers, exponential repair times with rate λ and lifetimes of machines having the above two-phase distribution. Argue that the steady-state probability of having n working machines equals the probability of having n customers in the above $M/E_2/s/s$ system.

Answer.

(a) The balance equations for the states (n_1, n_2) with $n_1 > 0,\ n_2 > 0$ and $n_1 + n_2 < s$ are given by

$$\begin{aligned} (\lambda + n_1\mu_1 + n_2\mu_2)p(n_1, n_2) = \lambda p(n_1 - 1, n_2) &+ (n_1 + 1)\mu_1 p(n_1 + 1, n_2 - 1) \\ &+ (n_2 + 1)\mu_2 p(n_1, n_2 + 1). \end{aligned} \tag{1}$$

Realize that, when there are n_1 customers in phase 1, the rate to go to $n_1 - 1$ customers in phase 1 equals $n_1\mu_1$.

(b) The two-dimensional process of numbers of customers in phase 1 and in phase 2 forms a continous-time Markov chain with a unique limiting distribution. If we find one solution, we are done. So it suffices to substitute the proposed solution, i.e.,

$$p(n_1, n_2) = C\frac{(\lambda/\mu_1)^{n_1}}{n_1!}\frac{(\lambda/\mu_2)^{n_2}}{n_2!}, \quad 0 \le n_1 + n_2 \le s,$$

into the balance equations. In the case of (1), one one can verify after substitution that the first term in the left-hand side (LHS) cancels against the third in the right-hand side (RHS), the second term in the LHS against the first in the RHS, and the third in the LHS against the second in the RHS.

(c)

$$\begin{aligned} p(n \text{ customers}) &= \sum_{n_1=0}^{s} p(n_1, n-n_1) = C\sum_{n_1=0}^{s}\frac{(\lambda/\mu_1)^{n_1}}{n_1!}\frac{(\lambda/\mu_2)^{n-n_1}}{(n-n_1)!} \\ &= C\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, \dots, s. \end{aligned}$$

Here, we used Newton's binomium in the following form

$$\sum_{n_1=0}^{s}\frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}(\lambda/\mu_1)^{n_1}(\lambda/\mu_2)^{n-n_1} = \left(\frac{\lambda}{\mu_1} + \frac{\lambda}{\mu_2}\right)^n.$$

The normalization constant C follows from $\sum_{n=0}^{s} p(n \text{ customers}) = 1$.

(d) Consider the part of the machine-repair model that contains the working machines. Suppose there are presently i working machines. Compare their behaviour with that of the i customers present in an $M/E_2/s/s$ queue. In both systems the service times are the sum of two exponential phases, with rates μ_1 and μ_2. In both systems, if $i < s$ then it takes an Exp(λ) amount of time until there is an arrival. In both systems, there can be no arrivals (admitted) when $i = s$. When i decreases from s to $s-1$, then in the machine-repair model it takes an Exp(λ) time until a machine is repaired and can again join the group of working machines, and in the $M/E_2/s/s$ it takes a residual interarrival time – which is also Exp(λ) because of the memoryless property of the exponential interarrival times – until a customer joins the group of customers in service. So one observes exactly the same behaviour (probabilistically) in both systems.

Exercise 4. A total of K jobs circulate in a closed network of four queues (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4), each with a single server. At each of the four queues, the jobs are served in order of arrival, and the service times are exponentially distributed with means $\frac{1}{\mu_1} = 2$, $\frac{1}{\mu_2} = \frac{1}{3}$ and $\frac{1}{\mu_3} = \frac{1}{\mu_4} = \frac{1}{2}$, respectively. Each job must sequentially undergo service in Q_2, Q_3 and Q_4, but sometimes the service in Q_2 is not successful, in which case an additional service must be performed at Q_1. A service at Q_2 is successful with probability $\frac{2}{3}$, in which case the job is forwarded to Q_3, then (always) to Q_4 and then (always) back to Q_2. If the service at Q_2 is not successful, then the job is sent to Q_1 and from there, after receiving service, returned to Q_2 in order to be processed there again.

(a) Determine the relative number of visits to each of the four queues.

(b) Determine the joint equilibrium distribution of the number of jobs at the four queues (including jobs possibly in service). Also indicate how the normalizing constant can be computed.

(c) Argue without any calculations that only Q_1 saturates if the number of jobs in the network grows large ($K \to \infty$), i.e., argue that in that case only in Q_1 the (mean) number of jobs tends to infinity.

(d) Choose $K = 2$. Use the *Mean-Value Analysis* algorithm to determine the mean number of jobs at each of the four queues (including jobs possibly in service).

Answer. The described network is a closed Jackson network with $N = 4$ queues. We have $p_{1,2} = p_{3,4} = p_{4,2} = 1$, $p_{2,1} = \frac{1}{3}$ and $p_{2,3} = \frac{2}{3}$.

(a) The relative number of visits to Q_i is labeled Λ_i and determined from the following system of equations, see equation (7.12) of the lecture notes,

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \frac{1}{3}\Lambda_2, \\ \Lambda_2 &= \Lambda_1 + \Lambda_4, \\ \Lambda_3 &= \frac{2}{3}\Lambda_2, \\ \Lambda_4 &= \Lambda_3. \end{aligned}$$

And so we get $\Lambda_1 = 1$, $\Lambda_2 = 3$, $\Lambda_3 = \Lambda_4 = 2$ (or multiplied by a constant).

(b) The joint equilibrium distribution of the number of jobs at the four queues is given by equation (7.11) of the lecture notes, namely

$$p(n_1, \ldots, n_4) = \frac{1}{G(4,K)} \prod_{i=1}^{4} \Big(\frac{\Lambda_i}{\mu_i}\Big)^{n_i} = \frac{2^{n_1}}{G(4,K)}$$

with normalization constant

$$G(4,K) = \sum_{\substack{n_1,\ldots,n_4 \geq 0 \\ n_1+\cdots+n_4=K}} 2^{n_1} = \sum_{n_1=0}^{K} 2^{n_1} \binom{K+2-n_1}{2}.$$

(c) $p(n_0, \ldots, n_3) = 2^{n_0}/G(4,K)$, so there is a large probability mass for large n_0.

(d) Using the MVA algorithm we obtain

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[L_1(2)] &= 7/8, \\ \mathbb{E}[L_2(2)] &= 3/8, \\ \mathbb{E}[L_3(2)] &= 3/8, \\ \mathbb{E}[L_4(2)] &= 3/8. \end{aligned}$$