Stochastic performance modelling (2WB60)

Instruction week 7, 25 March 2016

Exercise 1. (Opgave 2 tentamen 5CC80 januari 2007)
Twee soorten jobs worden door één processor behandeld. Stel dat de processor slechts één job tegelijk kan behandelen. Type-i jobs arriveren volgens een Poisson proces met intensiteit $\lambda_i = i$, $i = 1, 2$. Bedieningstijden van type-i jobs zijn exponentieel verdeeld, met gemiddelde $1/\mu$, $i = 1, 2$. Alle aankomstintervallen en bedieningstijden zijn onafhankelijk.

(a) Wat is de kans dat de eerste twee arriverende jobs beide van type 2 zijn?

(b) Als op tijdstip 0 slechts één klant aanwezig is, namelijk van type 2, wat is dan de kans dat deze job afgewerkt is voordat een type-1 job is gearriveerd?

(c) Stel dat de processor alle jobs in volgorde van aankomst afhandelt, ongeacht het type. Zij $X_i(t)$ het aantal jobs van type i, $i = 1, 2$, en $X(t) = X_1(t) + X_2(t)$. Beredeneer dat $\{X(t),\ t \geq 0\}$ een Markov proces is. Zou dat ook gelden als de bedieningstijden van type-1 jobs een ander gemiddelde hebben dan de bedieningstijden van type-2 jobs? Verklaar uw antwoord.

(d) Geef aan voor welke waarden van μ de evenwichtsverdeling van het totale aantal jobs in het systeem bestaat, en bepaal deze evenwichtsverdeling.

(e) Stel nu dat type-1 jobs *pre-emptieve* prioriteit hebben boven jobs van type 2. Bereken de gemiddelde verblijftijd van jobs van type 1, door eerst het gemiddelde aantal aanwezige type-1 jobs te bepalen.

Exercise 2. (Opgave 3 tentamen 5CC80 januari 2007)
Beschouw het $M/E_2/1$ wachtrijmodel, met aankomstintensiteit λ en dichtheid van de bedieningstijden $\mu^2 t e^{-\mu t}$, $t > 0$, en met belasting $\rho = 2\lambda/\mu < 1$.

(a) Elke bedieningstijd bestaat uit twee onafhankelijke exponentieel verdeelde *bedieningsfasen*, elk met verwachting $1/\mu$. Zij $Y(t)$ het aantal in het systeem aanwezige bedieningsfasen op tijdstip t. Beredeneer dat $\{Y(t),\ t \geq 0\}$ een niet-reduceerbaar en positief recurrent Markov proces is.

(b) Teken het toestandstransitiediagram (*transition rate diagram*) van dit Markov proces, en stel de vergelijkingen (*balance equations*) voor de evenwichtsverdeling van het Markov proces op.

(c) Ga na dat de oplossing van dit stelsel van de volgende vorm is: $p_n = C_1 q_1^n + C_2 q_2^n$, $n = 0, 1, \ldots$, waarbij $p_n = \lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(Y(t) = n)$. U hoeft de constanten C_i en q_i niet uit te rekenen. U hoeft ook niet te laten zien dat de q_i kleiner dan 1 zijn. (Deze opgave is wat lastiger.)

(d) Hoe is uit de gevonden oplossing de evenwichtsverdeling te vinden van het aantal klanten in het $M/E_2/1$ wachtrijmodel op een willekeurig tijdstip?

(e) Beredeneer dat die laatste kansverdeling gelijk is aan de kansverdeling van het aantal klanten in dit $M/E_2/1$ wachtrijmodel onmiddellijk na het vertrek van een klant.

Exercise 3. Consider an $M/E_2/s/s$ queue (Erlang loss system). Customers arrive according to a Poisson process with intensity λ, there are s servers and no waiting room. When a customer arrives who finds all servers occupied, he will immediately leave the system. The service times of customers are i.i.d.; they are the sum of two independent, exponential phases with rates μ_1 and μ_2. Let $p(n_1, n_2)$ be the steady-state probability of having n_1 customers in phase 1 and n_2 customers in phase 2.

(a) Determine the balance equations for $p(n_1, n_2)$, $0 \le n_1 + n_2 \le s$.

(b) Show that

$$p(n_1, n_2) = C \frac{(\lambda/\mu_1)^{n_1}}{n_1!} \frac{(\lambda/\mu_2)^{n_2}}{n_2!}, \quad 0 \le n_1 + n_2 \le s,$$

with C a normalising constant.

(c) Show that the steady-state distribution of the number of customers in the system (sum of numbers in both phases) is given by

$$p(n \text{ customers}) = \Big(\sum_{k=0}^{s} \frac{(\lambda/\mu)^k}{k!} \Big)^{-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, \ldots, s,$$

with $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}$.
Hint. Use Newton's binomium.

(d) Consider a machine-repair model with s servers, exponential repair times with rate λ and lifetimes of machines having the above two-phase distribution. Argue that the steady-state probability of having n working machines equals the probability of having n customers in the above $M/E_2/s/s$ system.

Exercise 4. A total of K jobs circulate in a closed network of four queues (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4), each with a single server. At each of the four queues, the jobs are served in order of arrival, and the service times are exponentially distributed with means $\frac{1}{\mu_1} = 2$, $\frac{1}{\mu_2} = \frac{1}{3}$ and $\frac{1}{\mu_3} = \frac{1}{\mu_4} = \frac{1}{2}$, respectively. Each job must sequentially undergo service in Q_2, Q_3 and Q_4, but sometimes the service in Q_2 is not successful, in which case an additional service must be performed at Q_1. A service at Q_2 is successful with probability $\frac{2}{3}$, in which case the job is forwarded to Q_3, then (always) to Q_4 and then (always) back to Q_2. If the service at Q_2 is not successful, then the job is sent to Q_1 and from there, after receiving service, returned to Q_2 in order to be processed there again.

(a) Determine the relative number of visits to each of the four queues.

(b) Determine the joint equilibrium distribution of the number of jobs at the four queues (including jobs possibly in service). Also indicate how the normalizing constant can be computed.

(c) Argue without any calculations that only Q_1 saturates if the number of jobs in the network grows large ($K \to \infty$), i.e., argue that in that case only in Q_1 the (mean) number of jobs tends to infinity.

(d) Choose $K = 2$. Use the *Mean-Value Analysis* algorithm to determine the mean number of jobs at each of the four queues (including jobs possibly in service).